Фрагмент учебно-методического пособия «Кибернетические основы информатики» в поддержку профильного курса информатики (Асаинова А.Ж. Кибернетические основы информатики. Задачник-практикум: Учебно-методическое пособие.- Павлодар, 2006. – 109 с.)

3.2. Кибернетика и логика

В каждой области знания, когда из посылок выводятся какие-либо умозаключения, логика находит применение в качестве орудия, инструмента умозаключения. Существуют определенные разделы (отрасли) науки, в которых изумительно отчетливо проявляется применение логики, особенно такого узкого ее раздела, каким является логика высказываний. Среди таких областей применения на первый план выдвигаются применения логики в кибернетике, а именно в теории и практике связи, к построению электрических устройств для сигнализации, что имеет неоценимое практическое значение. Применение логики для разработки подобных кибернетических устройств возможно в силу того, что состояние электрических устройств можно трактовать как высказывания: проводят ли они в данный момент ток (истинно,1) или же не проводят (ложно, 0); Таким образом, в основе разработки кибернетических машин лежит булева теория, или логика.

В течение многих веков логика помогала математике стать стройной, последовательной наукой. Математика и в наши дни опирается на законы логики. Постепенно взаимная связь между математикой и логикой привела к тому, что и логика оказалась под влиянием математики: в логике стали широко использовать буквенную символику, применять графические методы. Совместными усилиями математиков и логиков создана новая наука - математическая логика.

У истоков этой науки стояли немецкий философ и математик Г. В. Лейбниц (1646-1716), английский математик Дж. Буль (1815-1864), соотечественник П. С. Порецкий (1846-1907) и другие.

Развитие математической логики особенно активизировалось в середине нашего века; этому способствовало то, что методы математической логики оказались очень важными для кибернетики, и вычислительной техники в частности.

Простейший раздел математической логики - *алгебра высказываний*. Без ознакомления с ее основными понятиями нельзя разобраться в важных вопросах кибернетики. Под алгеброй понимается наука, которая изучает множества некоторых элементов, действия над ними, свойства введенных действий и использование их на практике.

Для того чтобы задать конкретную алгебру для ее изучения и использования необходимо:

- указать множество элементов (носитель), над которыми будут выполняться действия (операции);
- определить каждую операцию (дать четкие правила действий);

- ввести обозначение операций;
- изучить свойства каждой конкретной операции;
- показать примеры использования алгебры для решения задач.

Согласно этой логике мы и рассмотрим алгебру высказываний.

3.2.1.Носитель алгебры высказываний. Высказывания. Логические величины

Носителем алгебры высказываний является множество всевозможных высказываний. Элементы носителя – высказывания.

Под *высказыванием* понимают повествовательное предложение, о котором имеет смысл говорить истинно оно или ложно. Высказывание не может одновременно быть истинным или ложным.

Пример 2.Определить логическое значение следующих высказываний:

«Октябрь- осенний месяц» - высказывание истинное.

«Число 4 - четное» - высказывание истинное.

«Кит – это рыба» - высказывание ложное.

Пример 3. Определить является ли следующие предложения высказыванием

«(7+3):2» - не высказывание, не является повествовательным предложением, мысль не закончена.

«Астана - столица Казахстана» - это предложение является высказыванием, оно имеет логическое значение: «истина».

«Который час?» - не высказывание: не повествовательное предложение.

«Каша - вкусное блюдо»- не высказывание, является одновременно ложным и истинным.

Обозначаются простые высказывания прописными буквами латинского алфавита: A,B,C,D,… Если высказывание А истинно, будем писать А =1, если ложно: А =0. Например, пусть высказывание «9>7» обозначается буквой (логической переменной) А. Тогда А = 0. Логическое значение высказывания А ложно.

Логические величины: понятия, выражаемые словами: ИСТИНА, ЛОЖЬ (true, false). Следовательно, истинность высказываний выражается через логические величины.

Логическая константа: ИСТИНА или ЛОЖЬ.

Логическая переменная: символически обозначенная логическая величина. Следовательно, если известно, что, A,B,X,Y и пр.-переменные логические величины, то это значит, что они могут принимать значения только ИСТИНА или ЛОЖЬ.

Задачи

№1 Какие из предложений являются высказываниями? Определите их истинность.

1. Войдите
2. Река Волга длиннее реки Обь
3. Трижды семь больше, чем дважды по двенадцать

4. Не курить!
5. Все роботы являются машинами.
6. Пожалуйста, впустите!
7. Число 73 имеет четыре простых делителя
8. Который час?
9. 2х -5:> 11
10. 225 делится без остатка на 12.
11. Некоторые люди являются программистами.
12. Автор музыки к балету «Гаянэ» - Хачатурян

Если в этом высказывании заменить имя автора на другое, то будет ли новое высказывание объектом алгебры высказываний?

№2 Определите истинность высказывания.

1. Некоторые кошки не любят рыбу.
2. Человек все может.
3. Павлодар- северный город Казахстана.
4. Невозможно создать вечный двигатель.
5. 25 октября - день республики Казахстан.
6. Треугольник есть геометрическая фигура.
7. Полярная Звезда находится в созвездии Малой Медведицы.
8. $x<0$.

3.2.2. Логические операции, выражения. Таблицы истинности

Логическое выражение– простое или сложное высказывание. Сложное высказывание строится из простых с помощью логических операций (связок).

Логические операции

Конъюнкцией, или логическим умножением, высказываний А и В называется логическая операция, в результате которой получается высказывание, обозначаемое $A\wedge B$ ($A\bullet B$, $A\&B$) и читаемое «А **и** В», которое истинно в единственном случае: когда оба высказывания А и В истинны одновременно.

Пример 4

А: «6-натуральное число» =1.

В: «6 делится нацело на 2»=1.

А&В: «6-натуральное число **и** 6 делится нацело на 2»**=1**.

А&В =1.(Конъюнкция высказываний А и В равносильна единице, или логическое значение конъюнкции высказываний А и В равна истине).

Дизъюнкцией, или логическим сложением, высказываний А и В называется логическая операция, в результате которой получается высказывание, обозначаемое $A\vee B$ ($A\bullet B$, AB) и читаемое «А **или** В», которое ложно в единственном случае: когда оба высказывания А и В ложны одновременно.

Пример 5

А: «6-натуральное число» =1.

В: «6 делится нацело на 2»=1.

$A\vee B$: «6-натуральное число **или** 6 делится нацело на 2»**=1**.

$A \vee B$ =1.(Дизъюнкция высказываний A и B равносильна единице, или логическое значение дизъюнкции высказываний A и B равна истине).

Отрицанием, высказывания A называется логическая операция, в результате которой получается высказывание, обозначаемое $\neg A$ ($\boxed{A}$) и читаемое «**не** A», которое истинно, когда высказывание A ложно и которое ложно когда A истинно.

Пример 6

A: «6-натуральное число»=1.

$\neg$A: «6- **не** натуральное число» =0.

$\neg$A=0.(Отрицание высказывания A равносильна нулю, или логическое значение отрицания высказываний A равна лжи).

Импликацией высказываний A и B называется логическая операция, в результате которой получается высказывание, обозначаемое $A \Rightarrow B$ ($A \rightarrow B$) и читаемое «**если** A, **то** B», которое ложно в единственном случае: когда высказывание A истинно, а высказывание B ложно. Здесь A является условием (все, что до стрелки), а B - заключением.

Пример 7

A: «2-простое число» =1.

B: «2>3»=0.

$A \Rightarrow B$: «**Если** 2-простое число, **то** 2>3»**=0**.

$A \Rightarrow B$ =0.(Импликация высказываний A и B равносильна нулю, или логическое значение импликации высказываний A и B равна лжи).

Эквиваленцией высказываний A и B называется логическая операция, в результате которой получается высказывание, обозначаемое $A \Leftrightarrow B$ и читаемое «A **тогда и только тогда, когда** B», которое истинно в двух случаях:

- когда оба высказывания A и B ложны одновременно;
- когда оба высказывания A и B истинны одновременно

т.е. когда A и B имеют одинаковые логические значения.

Пример 8

A: «2-простое число» =1.

B: «2>3»=0.

$A \Leftrightarrow B$: «2-простое число, **тогда и только тогда, когда** 2>3»**=0**.

$A \Leftrightarrow B$ =0.(Эквиваленция высказываний A и B равносильна нулю, или логическое значение эквиваленции высказываний A и B равна лжи).

Логические операции конъюнкция, дизъюнкция, импликация, эквиваленция являются бинарными алгебраическими операциями. Логическая операция отрицания является унарной алгебраической операцией.

Правила выполнения рассмотренных логических операций можно отразить в следующей таблице, которая называется *таблицей истинности*.

	A	B	$A \neg B$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$

1	0	0	1	0	0	1	1
2	0	1	1	0	1	1	0
3	1	0	0	0	1	0	0
4	1	1	0	1	1	1	1

Выражение, содержащее буквенные переменные, вместо которых мыслятся высказывания и знаки логических операций, называется *выражение с логическими переменными, или логическое выражение*.

Порядок выполнения операций:

1. отрицание простого высказывания;
2. конъюнкция,
3. дизъюнкция;
4. импликация;
5. эквиваленция.

Пример 9 Определить порядок выполнения операций в логическом выражении:

$$\overline{\overline{C} \wedge D}$$

$$^{1}\overset{3}{\overline{\overline{C} \overset{2}{\wedge} D}} \overset{4}{\Rightarrow} A \overset{5}{\Leftrightarrow} B$$

Первой выполняется $\overline{C}$; затем $\overline{C} \wedge D$; третьим- $\overline{\overline{C} \wedge D}$, после выполняется импликация

Пример 10 Вычислить значение логического выражения $(A \Rightarrow B \wedge A) \vee C$, если логические переменные имеют следующие значения: A=0, B=1, C=1.

Решение. Определим сначала порядок выполнения операций в выражении:

$$(A \overset{2}{\Rightarrow} B \overset{1}{\wedge} A) \overset{3}{\vee} C$$

Вычислим формулу пооперационно, используя таблицу истинности:

1. $B \wedge A = 1 \wedge 0 = 0$.
2. $A \Rightarrow \boxed{B \wedge A} = 0 \Rightarrow 0 = 1$.
3. $(\boxed{A \Rightarrow B \wedge A}) \vee C = 1 \vee 1 = 1$. Ответ: $(A \Rightarrow B \wedge A) \vee C = 1$.

Пример 11. Из данного сложного высказывания составить формулу .

А: «Неверно, что число 6 является числом Фиббоначи и делится на 2»

В: «6 не является числом Фиббоначи и не делится на 2»

Решение.

А)

1. Обозначим переменной X первое простое высказывание «число 6 является числом Фиббоначи», а Y- «число 6 делится на 2».

2. Составим логическую формулу, проанализировав высказывание А. Сначала выделим логические операции в высказывании: в предложении присутствуют слова «Неверно, что», обозначающее отрицание, и слово «и»-конъюнкция. Операция **и** относится к высказываниям X и Y, что

обозначается как $X \wedge Y$. Слово **неверно, что** относится к предложению «число 6 является числом Фиббоначи и делится на 2», или $X \wedge Y$. Поэтому итоговая формула выглядит так: $\neg(X \wedge Y)$ Отрицание конъюнкции высказываний X и Y.

В)

1. Обозначим переменной X первое простое высказывание «число 6 является числом Фиббоначи», а Y- «число 6 делится на 2».

2. Составим логическую формулу, проанализировав высказывание А: в каждом простом предложении есть частица не, что обозначает отрицание высказывания. Поэтому предложение «6 **не** является числом Фиббоначи» обозначает $\neg X$, а «6 не делится на 2»- $\neg Y$. В предложении присутствует слово **и**, которое обозначает логическую операцию конъюнкции высказываний и относится к отрицаниям высказываний$\neg X$ и $\neg Y$. Поэтому формула будет выглядеть так: $\neg X \wedge \neg Y$

Задачи

№1

Определите значение истинности следующих высказываний:

1. Наурыз есть весенний праздник, и он справляется в день весеннего равноденствия.
2. Стороны равностороннего треугольника равны или не равны.
3. Сканер-устройство вывода информации и принтер – устройство связи.
4. Рыбу ловят сачком или ловят крючком, или мухой приманивают, иль червячком.
5. Все четные числа больше нечетных.
6. Если площади прямоугольников равны, то стороны этих прямоугольников равны.
7. Если Асхат – математик, то он имеет хорошую логическую подготовку.
8. Если 3*3=9, то Париж является столицей Казахстана.

№2

Запишите в виде логической формулы следующие высказывания и вычислить их логическое значение:

1. Число является простым, если оно делится только на единицу и само на себя.
2. 5 больше 7 и 5 является простым числом.
3. Если становится темно, то зажигают фонари.
4. Если идет дождь или светит солнце, то идет дождь или тепло.
5. Премию получишь тогда и только тогда, когда улучшишь качество.
6. Если число х делится на 6, то число х делится на 2.

7. Если мы поедем на море или возьмем палатку и пойдем в горы, то мы будем довольны каникулами.
8. Если Платон был в Египте и видел там пирамиды, то они его очень заинтересовали, или если кто-нибудь обратил на них его внимание и ему было объяснено их устройство, то они могли произвести на него неизгладимое впечатление.
9. Если гуся, то с капустой.

№2

Из данных сложных высказываний составить формулы и вычислить его логическое значение при данных условиях: Асхат учится в 8д классе, Иван - в школе №1, Айгуль ходит в музыкальную школу, в первой школе нет 8д класса. (на перенос):

«Неверно, что Асхат не учится в школе №1 и Айгуль учится в музыкальной школе или Иван не учится с Асхатом.»

№3

Дополнить высказывание, чтобы оно было истинным, при следующих условиях: Если (у меня будет велосипед), то (я навещу дядю). Если (я навещу дядю), то (я буду иметь велосипед).

(Я буду иметь велосипед) тогда и только тогда, когда (?).

Составить логическую формулу высказывания.

№3

Даны высказывания:

а) А. «Данное число не кратно трем»; б) В. «Данное число больше 50»

Даны формулы сложных высказываний, составленные из них: а) ¬AB; б) ¬(AB); в) A¬B.

Прочитать и записать эти сложные высказывания, подставляя вместо букв вышеприведенные простые высказывания.

№4

Из данных сложных высказываний составить формулы и вычислить его логическое значение (на перенос):

1. «32 больше 0 и неверно, что Луна является спутником Земли».
2. «Январь - зимний месяц или январь – первый месяц первого квартала и неверно, что в один байт больше одного килобайта».
3.

№5

С каким из следующих высказываний высказывание «Кит- морское животное» может образовать ложное логическое произведение:

1. «Семью восемь не 56»;
2. «сумма углов треугольника равна 180»;
3. «2 + 3 = 5»?

№6

Из трех высказываний, приведенных ниже, образовано логическое произведение, Определить его истинность.

1. «Ярко светит солнце»;
2. «Каждую весну распускаются почки»;

3. «17 является простым числом».

№7

Какие два из следующих высказываний образуют сложную логическую сумму:

1. «Утки зимуют на юге»;
2. «Дважды два равно пять»;
3. «Произведение «Путь Абая» сочинил М.Ауэзов»;
4. «Три есть делитель 56»?

№8

Дана истинная логическая сумма высказываний А, В, С. Известно, что А = В =1, Может ли высказывание С быть одним из следующих:

1. $3<x<4$;
2. $17\bullet 3=61$;
3. $(x-3)^2 = (x-3)(x^2 - 6x+9)$? Если да, то каким?

№9

В состав истинного логического произведения входят три простых высказывания А, В, С. Известно, что А и В - истинны. Может ли высказывание С быть одним из следующих:

1. «Дважды два равно семь»;
2. «Слоны живут в Африке и Индии»;
3. «$5x + 3 = 11x$»?

№10

Сложные высказывания составляются из следующих простых:

А. «Петя умеет плавать-»; В. «Сергей умеет прыгать>;

С. «Алеша не умеет стрелять».

Даны формулы сложных высказываний. Прочитать их, используя смысл высказываний А, В, и С:

1). А + ВС; 2). АВС; АВ + С; 3). АС + В; 4). АС + ВС.

№11

Дано высказывание: «Сергеев является членом сборной команды «Динамо». Какое из следующих высказываний есть логическим отрицанием данного?

1. Не Сергеев является членом сборной команды «Динамо»;
2. «Сергеев является членом сборной команды не «Динамо»;
3. «Сергеев не является членом команды «Динамо»;
4. «Неверно, что Сергеев является членом сборной команды «Динамо».

.№12

Отрицание какого из следующих высказываний истинно:

1. А. «38 делится нацело на 2»;
2. В. «Неверно, что у 6 всего 4 делителя»;
3. С. «Отрицание - единственная операция в алгебре высказываний»?

№13

Определите значения логических переменных x,y,z, если:

1. x и (в одних сутках 24 часа) – ложно; 0
2. y или (1 байт содержит 2 килобайта)-истинно; 1
3. z и (компьютерный символ равен 8 битам)- истинно; 1

№14

Определить истинность формул

1. $((\neg x\wedge y)\Rightarrow y)\vee\neg(x\wedge y)$.
2. $x\Rightarrow y\Leftrightarrow(x\wedge\neg y)$.
3. $(x\wedge\neg y)\vee\neg x\Rightarrow y\vee x\Leftrightarrow\neg y$

ПЕРЕНОС

Добавить задачи.

3.2.3. Эквивалентные высказывания

Вычисление истинности сложных высказываний является одной из важных задач алгебры высказываний.

Истинность сложных по структуре высказываний подсчитывается с помощью таблиц истинности.

Пример 12. Составим таблицу истинности для подсчета истинности высказывания, формула которого: $(A \vee \neg B) \wedge C$.

A	B	C	$\neg B$	$A \vee \neg B$	$(A \vee \neg B) \wedge C$
1	1	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	1	1	1
0	0	0	1	1	0

Эквивалентными (равносильные) высказываниями называются два или несколько высказывания, значения которых, вычисленных с помощью таблицы истинности, совпадают.

Эквивалентные (равносильные) высказывания соединяются знаком «≡» (звучит как равносильно). Например, «$A\Rightarrow B$ эквивалентно $\neg B\Rightarrow\neg A$» обозначается выражением: $A\Rightarrow B\equiv\neg B\Rightarrow\neg A$

Алгоритм доказательства эквивалентности двух выражений с логическими переменными:

1. Определить, какие логические переменные входят в правую и левую часть выражения и сколько их.
2. Определить число наборов логических значений выявленных переменных
3. Установить порядок выполнения действий и их количества.
4. Составить таблицу истинности (для каждого действия отводится отдельный столбик).
5. Сравнить логические значения выражений при всех наборах логических значений переменных A и B.

6. Сделать вывод: данные выражения с логическими переменными равносильны, т.к. их значения совпадают при всех наборах логических значений переменных А и В, либо данные выражения с логическими переменными неравносильны, т.к. их логические значения не совпадают при наборах …

Пример 13. Доказать что высказывание $A \Rightarrow B$ эквивалентно $\neg B \Rightarrow \neg A$.

$A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$

1. Логические переменные выражения - А и В.
2. Набор логических значений для А и В: 1 1, 1 0, 0 1, 0 0. Если бы переменных было 3, тогда каждый набор состоял из трех цифр.
3. Порядок выполнения действий: 1) $A \Rightarrow B$; 2) $\neg B$; 3) $\neg A$; 4) $\neg B \Rightarrow \neg A$.
4. Построим таблицу истинности для этих двух высказываний

A	B	$A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg A$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1
0	0	1	1	1	1

5. Сравним третью и шестую колонки: все значения истинности $A \Rightarrow B$ и $\neg B \Rightarrow \neg A$ совпадают.
6. Делаем вывод: Данные выражения с логическими переменными эквивалентны, т.к. их значения совпадают при всех наборах логических значений переменных А и В.

Пример 14. Доказать с помощью таблицы истинности равносильность высказывания $\neg A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$:

A	B	$\neg A$	$\neg A \Rightarrow B$	$\neg B$	$\neg B \Rightarrow \neg A$
1	1	0	1	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1
0	0	1	0	1	1

Вывод: $\neg A \Rightarrow B \equiv \neg B \Rightarrow \neg A$. Данные выражения не равносильны, т.к. их логические значения не совпадают при наборах (1,0), (0,0).

Задачи

№1. Доказать равносильность высказываний:

1. $A \Rightarrow B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$.
2. $\neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B) \vee B$.
3. $A \wedge \neg B \equiv \neg(\neg B \Rightarrow \neg A)$.
4. $\neg A \vee B \equiv A \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$.

№2 Какие высказывания эквивалентны:

1. $\neg A \vee \neg B$.
2. $\neg(A \wedge B)$.
3. $A \vee \neg B$.

4. $\neg(\neg A \vee B)$.

№3 Какие высказывания эквивалентны:

1. $\neg(A \wedge B \vee \neg C)$.
2. $A \wedge B \vee \neg A \wedge B \wedge C$.
3. $(\neg A \vee B) \wedge C$.

№4 Какому из нижеприведенных высказываний эквивалентно высказывание $\neg A \wedge (B \vee C)$:

1. $\neg B(A \vee C)$.
2. $\neg(B \wedge A) \vee B$.
3. $\neg A(B \vee C)$.
4. $\neg(A \vee \neg(B \vee C))$.

№5 Даны два высказывания:

1. «Сейчас идет дождь, а гром не гремит»;
2. «Сейчас не идет дождь или сейчас гремит гром».

Как изменить второе высказывание, чтобы оно оказалось эквивалентным первому?

№6. Из простых высказываний составлена фраза, формула которой имеет вид: $X \equiv (A+C)(A+B)$. Установить эквивалентно ли высказывание X высказыванию «Аскар хороший пловец и он хорошо поет».

A: «Аскар- хороший пловец»;

B: «Аскар хорошо ныряет»;

C: «Аскар хорошо поет».

№7. Из простых высказываний составлена фраза, формула которой имеет вид: $X \equiv A \Rightarrow B$. Установить эквивалентно ли высказывание X высказыванию «Если комаров нет, то лето не наступило».

A: «Лето наступило».

B: «Появляются комары».

3.2.4. Тождественные высказывания. Преобразования логических выражений

Выражение с логическими переменными называются *тождественно-истинными* (или тавтологией), если оно принимает только истинные значения.

Выражение называется *тождественно-ложным*, если оно всегда принимает только ложные значения.

Установить является ли выражение тождественно-истинным или тождественно-ложным можно только с помощью таблицы истинности.

Пример 15. Установить является ли данное выражение тождественно-истинным.

$B \vee \neg B$

B	$\neg B$	$B \vee \neg B$
1	0	1

0	1	1

Вывод: данное выражение является тождественно-истинным, т.к. оно принимает только истинные значения при всех наборах логических значений переменных А и В.

Табличный способ определения истинности сложного выражения имеет ограниченное применение, поскольку при увеличении числа логических переменных приходится перебирать слишком много вариантов. В таких случаях применяется способ приведения формул к нормальной форме. Формула имеет *нормальную форму*, если в ней отсутствуют знаки импликации, эквивалентности, двойного отрицания, при этом знаки отрицания находятся только при переменных. Преобразовать выражение можно при помощи основных свойств логических операций над высказываниями.

Свойства логических операций

Свойство коммутативности	
1. $A\wedge B\equiv B\wedge A$	$A\vee B\equiv B\vee A$
Свойство ассоциативности	
2. $(A\wedge B)\wedge C\equiv A\wedge(B\wedge C)$	$(A\vee B)\vee C\equiv A\vee(B\vee C)$
Свойство дистрибутивности	
3. $(A\vee B)\wedge C\equiv(A\wedge C)\vee(B\wedge C)$	$(A\wedge B)\vee C\equiv(A\vee C)\wedge(B\vee C)$
Свойство де Моргана	
4. $\neg(A\wedge B)\equiv\neg A\vee\neg B$	$\neg(A\vee B)\equiv\neg A\wedge\neg B$
Свойство поглощения	Свойство склеивания
5. $A\wedge A\equiv A$	$A\vee A\equiv A$
Свойство исключенного третьего	
6. $A\wedge\neg A\equiv 0$	$A\vee\neg A\equiv 1$
Свойства логических констант	
7. $A\wedge 0\equiv 0$	$A\vee 1\equiv 1$
8. $A\wedge 1\equiv A$	$A\vee 0\equiv A$
Свойство двойного отрицания	
9. $\neg\neg A\equiv A$	
Свойство импликации	
10. $A\Rightarrow B\equiv\neg A\vee B$	
Свойство эквиваленции	
11. $A\Leftrightarrow B\equiv(A\Rightarrow B)\wedge(B\Rightarrow A)\equiv(\neg A\vee B)\wedge(\neg B\vee A)$	

Свойства 1-8 первой и второй колонок таблицы связаны между собой так называемым принципом двойственности: если в свойствах 1-8 первой колонки заменить знак конъюнкции на знак дизъюнкции, знак дизъюнкции на знак конъюнкции, 1 на 0, 0 на 1, то получатся свойства 1-8 второй колонки.

Свойства называют также основными законами.

Пример 16. Упростить следующую логическую формулу (в фигурных скобках указан номер использованного свойства или формулы преобразования):

$\neg(A \Rightarrow B) \equiv \{10\} \neg(\neg A \vee B) \equiv \{4\} \neg\neg A \wedge \neg B \equiv \{9\} A \wedge \neg B$.

Пример 14. Четырех девушек Сауле, Розу, Алму и Жулдуз решили пригласить печь пироги. Но не каждая умеет их печь. Человек, знающий их, сказал следующее:

1. Если Алма или Сауле пекут, то Роза не печет.
2. Если Сауле не печет, то пекут Роза и Жулдуз.
3. Роза печет пироги.

Решение: Определим следующие простые высказывания:

А: «Алма печет пироги»;

С: «Сауле печет пироги»;

Р: «Роза печет пироги»;

Ж: «Жулдыз печет пироги»;

Запишем сложные высказывания, выражающие известные факты:

1. $(A \vee C) \Rightarrow \neg P$;
2. $\neg C \Rightarrow P \wedge Ж$;
3. P.

Запишем произведение указанных сложных высказываний:

$$((A \vee B) \Rightarrow \neg P) \wedge (\neg C \Rightarrow P \wedge Ж) \wedge P.$$

Упростим эту формулу:

$((A \vee C) \Rightarrow \neg P) \wedge (\neg C \Rightarrow P \wedge Ж) \wedge P \equiv \{10,9\} (\neg(A \vee C) \vee \neg P) \wedge (C \vee P \wedge Ж) \wedge P \equiv \{4\} (\neg A \wedge \neg C \vee \neg P) \wedge (C \vee P \wedge Ж) \wedge P \equiv 1$ Отсюда: $\neg A \wedge \neg C \wedge P \wedge Ж \equiv 1$.

Ответ: пироги пекут Роза и Жулдуз, а Сауле и Алма – не пекут.

Задачи

№1. Среди высказываний выбрать тождественно ложное.

1. (A + B) • (A + 11);
2. (A + B) • (A + B) A

№2. Среди высказываний выбрать тождественно истинное.

1. A + BB + A;
2. AB (A + B);
3. (A + A}(AC + A + C)

№4. Упростите выражение, используя минимум законов логических операций:

1. $(A \wedge \neg B) \vee \neg A \Rightarrow B \vee A$.
2. $\neg(A \vee B \vee \neg(A \vee B)) \wedge \neg(B \vee A)$.

№5. Упростить логическую формулу и определить ее истинность:

$$A \Rightarrow B \Leftrightarrow A \wedge \neg B$$

№6 Определить значение формул:

1. $A \Rightarrow (B \Rightarrow A \vee B)$
2. $\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$

№7. Доказать равносильность (эквивалентность) высказываний с помощью основных свойств (для этого преобразуйте первое выражение с помощью основных свойств так, чтобы получилось второе, либо преобразуете второе выражение так, чтобы получилось первое, либо преобразуете и первое и второе так, чтобы получился одинаковый результат). (перенос)

1. $\neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$
2. $A \Rightarrow B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B) \equiv A \wedge \neg B$.
3. $\neg A \vee B \equiv \neg(A \wedge \neg B) \vee B$.
4. $A \wedge \neg B \equiv \neg(\neg B \Rightarrow \neg A)$.

№8

Что можно сказать о логическом значении А и В, если $(A \vee \neg B) \vee \neg A \Rightarrow B \vee A = 0$?

№9

Определите, кто из подозреваемых участвовал в преступлении, если известно:

1) если Иванов не участвовал или Петров участвовал, то Сидоров участвовал;

2) если Иванов не участвовал, то Сидоров не участвовал.

№10

В соревнованиях по гимнастике на первенство школы участвуют Алма, Валя, Айгуль и Жанна, Болельщики высказали предположения о возможных победителях:

«Первой будет Айгуль, Валя будет второй». «Второй будет Айгуль, Жанна - третьей». «Алма будет второй, Жанна - четвертой».

По окончании соревнований оказалось, что в каждом предположении только одно из высказываний истинно, другое же ложно, Какое место на соревнованиях заняла каждая из девочек, если все они оказались на разных местах?

№11

На вопрос, какая завтра будет погода, синоптик ответил:

1. «если не будет ветра, то будет пасмурная погода без дождя');
2. «если будет дождь, то будет пасмурно и без ветра.);
3. «если будет пасмурная погода, то будет дождь и не будет ветра,).

Подумав немного, синоптик уточнил, что его три высказывания можно лаконично записать в виде одного составного высказывания. Сформулируйте его, решив задачу с помощью логических операций.

№10

На ледяном поле пятерка Ольховский - Малышев – Белов - Таманин - Лавров штурмовала ворота, когда раздался свисток судьи. «Удалят двоих»,- подумали спортсмены.

«Без Малышева или Ольховского я не останусь на поле»,- сказал Таманин,'

«Я тоже»,- сказал Лавров.

«Удалят либо меня с Беловым, либо Таманина с Лавровым»,- заключил Малышев.

Когда судья объявил о своем решении, все эти предположения оказались верными и, кроме того, Ольховский и Белов не остались вместе на поле. Кто из хоккеистов продолжал игру?

№11.

Аня, Вика и Сергей решили пойти в кино. Учитель, хорошо знавший ребят, высказал предположения:

1. Аня пойдет в кино только тогда, когда пойдут Вика и Сергей;
2. Аня и Сергей пойдут в кино вместе или же оба останутся дома;
3. чтобы Сергей пошел в кино, необходимо, чтобы пошла Вика.

Когда ребята пошли в кино, оказалось, что учитель немного ошибся: из трех его утверждений истинными оказались только два. Кто из ребят пошел в кино? Решить задачу с помощью логических операций.

№13.

Виктор, Роман, Леонид и Сергей заняли на олимпиаде по физике четыре первых места. Когда их спросили о распределении мест, они дали три таких ответа:

1. Сергей - первый, Роман - второй;
2. Сергей - второй, Виктор - третий;
3. Леонид - второй, Виктор - четвертый.

Известно, что в каждом ответе только одно утверждение истинно. Как распределились места?

№14

Алеша, Боря и Гриша нашли в земле старинный сосуд. Рассматривая удивительную находку, каждый высказал по два предположения:

Алеша: «Это сосуд греческий и изготовлен в V веке,).

Боря: «Это сосуд финикийский И изготовлен в III веке,). Гриша: «Это сосуд не греческий и изготовлен в IV веке,). Учитель истории сказал ребятам, что каждый из них прав только в одном из двух предположений. Где и в каком веке изготовлен сосуд?

№15

В нарушении правил обмена валюты подозреваются четыре работника банка - A, B, C и D. Известно, что:

1. Если A нарушил, то и B нарушил правила обмена валюты.
2. Если B нарушил, то и C нарушил или A не нарушал.
3. Если D не нарушил, то A нарушил, а C не нарушал. 4. Если D нарушил, то и A нарушил.

Кто из подозреваемых нарушил правила обмена валюты? Решите задачу с помощью логических операций.

//добавить из

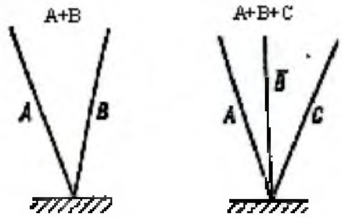
3.2.5. Графический способ решения задач алгебры высказываний

В алгебре высказываний можно применять и графические методы. При решении логических задач, например, очень часто бывает полезно вычертить «дерево логических условий». Это «дерево» выражает в виде простого чертежа логическую взаимосвязь между данными высказываниями. Такие «деревья» принято называть «*графами*».

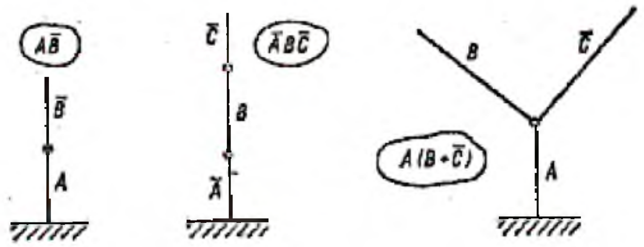
«Выращивание» любого дерева начинается с рассмотрения исходной формулы. Пусть эта формула есть логическая сумма двух или нескольких высказываний.

Например: A + B или A + B + C или A + B + C + D.

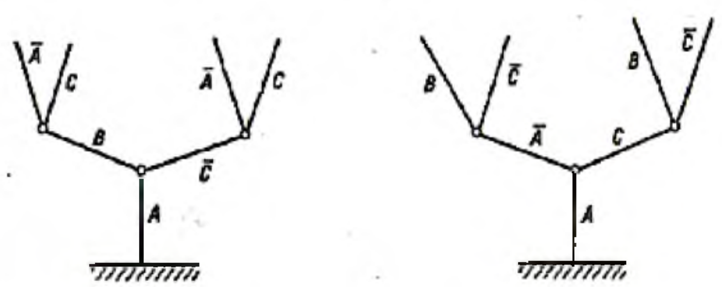
Каждому простому высказыванию в формуле (с отрицанием или без него) на «выращиваемом» дереве будет соответствовать одна ветвь. Логической сумме на графе будет соответствовать «разветвление» ветвей.



Логическому произведению на выращиваемом дереве будет соответствовать «следование» ветвей друг за другом.



Графы формул будут эквивалентны, если соответствующие им формулы эквивалентны. Например, $A(B\vee\neg C)\wedge(\neg A\vee C)\equiv A(\neg A\vee C)\wedge(B\vee\neg C)$. И графы соответствующих формул одинаковы.



Пример 17. Решить логическую задачу «Кто чемпион школы?» с помощью логического дерева.

Чемпионат школы по гимнастике в самом разгаре. Болельщики горячо обсуждают ход борьбы и высказывают немало предположений о будущих победителях. Один из болельщиков считает, что первой будет Наташа, а Майя будет второй. Другой болельщик на второе место прочит Люду, а Рита, по его мнению, будет самая слабая, ей он отводит четвертое место. Третий болельщик думает, что Рита займет третье место, а Наташа будет второй.

Когда чемпионат школы закончился, оказалось, что каждый из болельщиков прав только в одном из своих предположений. Какое место на чемпионате заняли Наташа, Рита, Майя и Люда?

Решение. «Выращивание» логического дерева

Дерево логических условий начнем строить сразу без предварительного выписывания формул сложных высказываний. Почвой, на которой будет «расти дерево», является условие задачи.

По условию мы знаем, что первый болельщик прав либо в том, что первой будет Наташа, либо в том, что Майя будет второй. Это даст нам основание «вырастить» две первые ветви дерева- $Н_1$ и $М_2$.

Рис 1.

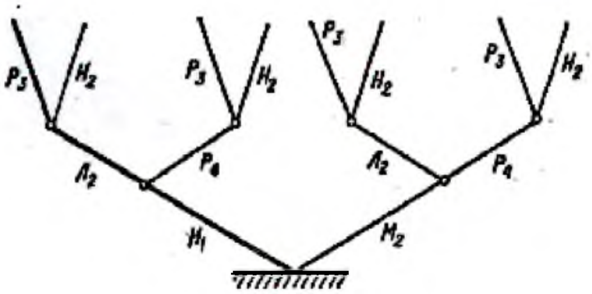


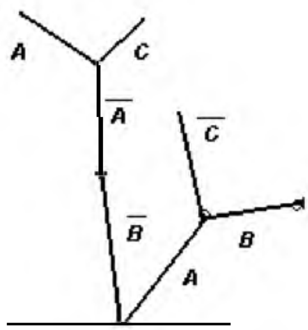
Рис. 2

Второй болельщик прав либо в том, что на втором месте будет Люда, либо в том, что Рита займет четвертое место. Исходя из этого, дерево можно «дорастить».

Наконец, учтя предсказание третьего болельщика (а он прав в одном случае: либо в том, что Рита займет третье место, либо в том, что Наташа будет второй), завершаем «выращивание» дерева (рис. 1).

Ответом является в данном случае одна ветвь: Н1Л2Р3. Только эта ветка является истинной. Движение вдоль других ветвей приводит к образованию ложных логических произведений. Например, ложно произведение, соответствующее крайней правой ветви дерева М2Р4Р3Н2, потому что является противоречивым Р4Р3 – Рита не может занимать 4 и 3 место одновременно.

Пример 15. Выписать формулу, соответствующую логическому дереву.



.Решение. Мы видим, что от основного ствола «разветвляются» две ветви (А и ¬В): формула-¬В∨А. За ветвью А следует еще одно разветвление из двух ветвей (¬С и В): ¬С∨В. Правая ветвь представляется формулой: А∧(¬С∨В).

Левая ветвь соответственно: ¬В∧¬А∧(А∨С). Обе «ветви»(высказывания) объединяются операцией дизъюнкции. Поэтому ответ равен (¬В∧¬А∧(А∨С))∨(А∧(¬С∨В)).

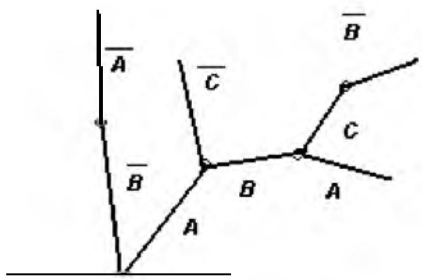
Задачи

№16

Решить графическим способом задачи №8-15.

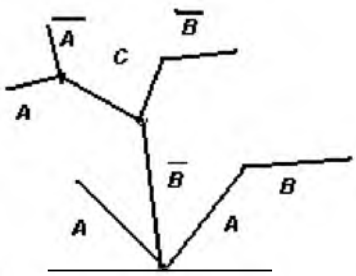
№17

Выписать логическую формулу, соответствующую нижеприведенному графу.



№18

Выписать логическую формулу для следующего графа:



№20

С помощью логического дерева доказать равносильность высказываний:

1. А⇒В⇒¬(А⇒В)≡А∧¬В.
2. ¬А∨В≡¬(А∧¬В)∨В.

3. $A \wedge \neg B \equiv \neg(\neg B \Rightarrow \neg A)$.
4. $\neg A \vee B \equiv A \wedge \neg B \Rightarrow \neg A$.