

М. К. Жукенов

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В
АНИЗОТРОПНЫХ
МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
СРЕДАХ**

Павлодар

Министерство образования и науки Республики Казахстан

Павлодарский государственный университет
им. С. Торайгырова

М. К. Жукенов

**РАСПРОСТРАНЕНИЕ
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В
АНИЗОТРОПНЫХ
МАГНИТОЭЛЕКТРИЧЕСКИХ
СРЕДАХ**

Монография

Павлодар
Кереку
2018

УДК 537.8
ББК 22.336
Ж85

**Рекомендовано к изданию Ученым советом Павлодарского
государственного университета имени С. Торайгырова**

Рецензенты:

А. С. Кудусов – к. физ.-мат. наук, зав. кафедрой физики и нанотехнологий Карагандинского государственного университета имени Е. А. Букетова;

Р. Н. Асылбаев – PhD по специальности «Физика», доцент Павлодарского государственного педагогического университета;

Т. С. Досанов – канд. физ.-мат. наук.

Жукенов М. К.

Ж85 Распространение электромагнитных волн в анизотропных магнитоэлектрических средах / М. К. Жукенов. – Павлодар : Кереку, 2018. – 105 с.

ISBN

В монографии, на основе метода матрицанта, рассматриваются вопросы распространения электромагнитных волн в анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом.

Работа представляет интерес для студентов, магистрантов и докторантов специальностей «Физика», «Механика», а также использованию в теоретических расчетах при проектировании и изготовлении различных приборов и устройств.

УДК 537.8
ББК 22.336

ISBN

© Жукенов М. К. 2018
© ПГУ имени С. Торайгырова, 2018

За достоверность материалов, грамматические ошибки ответственность несут авторы и составители

Введение

В монографии рассматриваются теоретические вопросы закономерностей распространения электромагнитных волн в анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом.

В работе на основе аналитического матричного метода рассмотрено распространение электромагнитных волн в магнитоэлектрических анизотропных средах.

Суть метода заключается в приведении исходных уравнений Максвелла, на основе метода разделения переменных, к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами и построении структуры матрицанта.

Определена структура матрицанта уравнений Максвелла, описывающих распространение электромагнитных волн в анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом. Получены инвариантные соотношения, имеющие место в рассматриваемом процессе, и отражающие законы сохранения. Получены уравнения дисперсии электромагнитных волн в случае неограниченной периодически неоднородной анизотропной среды с магнитоэлектрическим эффектом. Построен матрицант уравнений Максвелла однородной анизотропной среды с магнитоэлектрическим эффектом. Приведена матричная форма граничных условий и аналитически решена задача отражения и преломления электромагнитных волн на границе изотропной среды и анизотропной среды с магнитоэлектрическим эффектом.

Проведен численный анализ энергетических коэффициентов отражения и преломления при отражении электромагнитных волн на границе изотропной среды и анизотропной среды с магнитоэлектрическим эффектом; построены графики зависимости энергетических коэффициентов отражения и преломления от угла падения электромагнитных волн.

1 Обзор литературы. Научная новизна, цель, метод, объект и практическая значимость исследования

Магнитоэлектрический эффект относится к перекрестным эффектам и сам по себе уже представляет интерес для исследований, поскольку в магнитоэлектрических материалах наблюдается взаимосвязь процессов намагничивания и поляризации. В области магнитного резонанса магнитоэлектрический эффект проявляется в сдвиге резонансной линии под действием электрического поля. Это позволяет на основе магнитоэлектрического эффекта создать приборы функциональной электроники, в которых управление осуществляется не только магнитным, но и электрическим полями. К настоящему времени проведен большой объем исследований магнитоэлектрического эффекта на низких частотах, однако в области магнитного резонанса этот эффект изучен недостаточно.

Практическому использованию магнитоэлектрического эффекта монокристаллов в твердотельной электронике препятствует малая величина эффекта. Развитие технологии изготовления композиционных материалов позволило создать магнитоэлектрические феррит-пьезоэлектрические структуры. Величина магнитоэлектрического эффекта в композитах значительно больше, чем в монокристаллах. В композиционных материалах магнитоэлектрический эффект возникает вследствие механического взаимодействия магнитной и пьезоэлектрической подсистем, поэтому следует ожидать, что на частоте электромеханического резонанса будет наблюдаться увеличение магнитоэлектрического эффекта. Между тем, ни теоретического, ни экспериментального исследования частотной зависимости магнитоэлектрических коэффициентов в области акустических частот проведено не было.

Магнитоэлектрический эффект заключается в индуцировании электрической поляризации в материале во внешнем магнитном поле или в появлении намагниченности во внешнем электрическом поле. Общим для монокристаллических материалов является то, что магнитоэлектрический эффект наблюдается в большинстве из них при температурах, значительно ниже комнатной. Это связано с низкими температурами Нееля или Кюри для этих материалов. Магнитоэлектрические коэффициенты обращаются в нуль, как только температура приближается к точке перехода в неупорядоченное состояние. Кроме того, монокристаллические материалы характеризуются малыми значениями магнитоэлектрических коэффициентов, величина которых недостаточна для практического

использования этих материалов. В значительной степени от указанных недостатков свободны композиционные материалы на основе ферритов и пьезоэлектриков. Для композиционных материалов открываются широкие возможности варьирования их физических свойств, а значит и оптимизации характеристик устройств на их основе.

Температурная зависимость магнитоэлектрического эффекта в антиферромагнетиках может быть использована для определения температуры Нееля. Такая возможность обусловлена тем, что магнитоэлектрическая восприимчивость обращается в нуль при температурах выше температуры Нееля. Достоинством композиционных материалов является то, что магнитоэлектрический эффект в них может быть использован для определения температуры Кюри для сегнетоэлектрической фазы. Кроме того, структура тензора магнитоэлектрической восприимчивости может быть использована при уточнении симметрии кристаллических структур фаз слоистого композита. Магнитоэлектрическая восприимчивость и магнитоэлектрический коэффициент по напряжению определяются параметрами фаз композита и их объемными долями. Поэтому измеренные значения магнитоэлектрических параметров могут быть использованы при определении таких параметров исходных компонент композита, как коэффициенты жесткости, податливости, пьезоэлектрические коэффициенты, диэлектрическая и магнитная проницаемости, пьезомагнитные модули. Параметры максвелл-вагнеровской релаксации и резонансной дисперсии магнитоэлектрических параметров также могут быть использованы для уточнения таких параметров фаз, как электрическая проводимость, диэлектрическая проницаемость и т.п.

Известно, что магнитная восприимчивость феррита имеет резонансную зависимость от внешнего постоянного электрического поля. Наблюдение магнитного резонанса в феррите становится возможным в электрическом поле при использовании слоистого композиционного материала, в котором одной из компонент является исследуемый феррит. Указанный метод наблюдения ферромагнитного резонанса во внешнем постоянном электрическом поле основан на эффекте изменения частоты магнитного резонанса при воздействии на образец внешнего постоянного электрического поля. При этом система магнитной разветвки может быть упрощена или исключена, а для перестройки частоты магнитного резонанса используется источник напряжения.

Одним из перспективных направлений использования композиционных феррит-пьезоэлектрических материалов является создание датчиков физических величин с широким частотным диапазоном. Керамическая технология изготовления композиционных материалов обуславливает их низкую стоимость по сравнению с монокристаллическими и поликристаллическими материалами и позволяет изготавливать датчики в микроэлектронном исполнении. В качестве примеров таких устройств можно указать датчики постоянного и переменного магнитного поля на основе многослойных и объемных композиционных магнитоэлектрических материалов, пригодные для промышленного изготовления с применением микроэлектронной технологии.

Магнитоэлектрический эффект в твёрдом теле был предсказан Л.Д.Ландау и Е.М.Лифшицем в 1957 г. [1]. Для феноменологического материала, помещенного в однородные магнитное и электрическое поля, изменение объемной плотности свободной энергии может быть выражено следующим образом:

$$dF = -P_i dE_i - \mu_0 M_i dH_i,$$

где P_i – компоненты вектора электрической поляризации;

M_i – компоненты вектора намагниченности;

E_j – компоненты электрического поля;

H_j – компоненты магнитного поля.

Можно получить выражения для поляризации и намагниченности материала:

$$P_i = - \left(\frac{\partial F}{\partial E_i} \right)_{H,T},$$

$$\mu_0 M_i = - \left(\frac{\partial F}{\partial H_i} \right)_{E,T}$$

где T – температура.

В предположении, что электрическая χ^E и магнитная χ^M восприимчивости не зависят от E и H , получаем с учетом магнитоэлектрического эффекта

$$F = -\frac{1}{2} \chi_{ij}^E E_i E_j - \alpha_{ij} E_i H_j - \frac{1}{2} \chi_{ij}^M H_i H_j$$

Из этого следуют материальные соотношения

$$P_i = \chi_{ij}^E E_j + \alpha_{ij} H_j,$$

$$M_i = \chi_{ij}^M H_j + \alpha_{ij} \mu_0 E_j$$

Тензор магнитоэлектрической восприимчивости в общем случае является тензором второго ранга. И.Е. Дзялошинский теоретически показал, что среди веществ с известной магнитной структурой имеется, по крайней мере, один кристалл, а именно оксид хрома, в котором должен иметь место магнитоэлектрический эффект [2]. В 1960г. Д. Н. Астров экспериментально обнаружил магнитоэлектрический эффект в оксиде хрома [3] и измерил продольную и поперечную магнитоэлектрической восприимчивости. В измерительной установке Астрова регистрировался переменный магнитный момент, возникающий в образце под действием приложенного электрического поля. Измерения проводились на частоте 10 кГц.

Затем Folen et al. [4] измерили магнитоэлектрический эффект, индуцированный магнитным полем. Эти измерения были проведены также на оксиде хрома довольно простым способом: монокристаллический образец помещался между полюсами электромагнита, а электроды, нанесённые методом осаждения на обе стороны образца, подсоединялись к вакуумному электрометру. При включении электромагнита электрометром измеряли напряжение, возникающее в образце. Этот же статический метод применял Ascher E. [5] при исследовании $Ni_3B_7O_{13}I$.

Была рассмотрена связь магнитоэлектрического эффекта с симметрией кристаллической структуры [4], в частности, установлено, что произведение $\alpha_{ij} E_i H_j$ отлично от нуля только в магнитоупорядоченных материалах. Предложены теоретические модели наблюдаемого магнитоэлектрического эффекта в некоторых

материалах [5-7]. Проведена классификация магнитоэлектрических материалов по магнитным точечным группам [8] и рассмотрена магнитоэлектрическая симметрия материалов [9]. Было проведено объяснение магнитоэлектрического эффекта на основе статистической теории [10, 11]. Изучалось распространение волн в магнитоэлектрических средах [12, 13].

В 1982 г. был предложен новый подход к изучению магнитоэлектрического эффекта в ферримагнетиках [14], согласно которому плотность магнитной энергии может быть разложена в ряд по степеням намагниченности, а симметрия тензорных коэффициентов этого ряда определяется, главным образом, симметрией парафазы кристалла. Вклад в развитие теории магнитоэлектрического эффекта внесли также Шавров В.Г. [15], Alexander S., Shtrikman S. [16], Asher E. [17].

Rado [18-19] обнаружил линейный магнитоэлектрический эффект в ферримагнитном материале. $Ga_{2-x}Fe_xO_3$. Этот эффект был объяснен наличием пьезоэлектрических и пьезомагнитных свойств материала. Примером материала, обладающего квадратичным магнитоэлектрическим эффектом, является борат железа $FeVO_3$ [20].

К настоящему времени изучено большое количество монокристаллических магнитоэлектрических материалов. Наиболее подробно свойства магнитоэлектрических материалов рассмотрены в [21-26]. Общим для этих материалов является то, что магнитоэлектрический эффект наблюдается в большинстве из них при температурах, значительно ниже комнатной. Это связано с низкими температурами Нееля или Кюри для этих материалов. Магнитоэлектрические коэффициенты обращаются в нуль, как только температура приближается к точке перехода в неупорядоченное состояние. Кроме того, монокристаллические материалы характеризуются малыми значениями магнитоэлектрических коэффициентов, величина которых недостаточна для практического использования этих материалов. В значительной степени от указанных недостатков свободны композиционные материалы на основе ферритов и пьезоэлектриков [27].

Современный прогресс в науке и технике неразрывно связан с развитием наших знаний в области композиционных материалов. Спектр применений композиционных материалов чрезвычайно широк - от космических аппаратов до бытовых приборов. Важное место среди известных композиционных материалов занимают материалы, уникальные свойства которых обусловлены существованием магнитоэлектрического эффекта.

В отличие от монокристаллов магнитоэлектрический эффект в композиционных материалах представляет собой так называемый «вторичный» эффект в цепочке «магнитострикция – упругая деформация – пьезоэлектрический эффект» и благодаря подбору компонентов с высокими магнитострикционными и пьезоэлектрическими константами удается получить величину магнитоэлектрического эффекта, необходимую для практического использования.

Магнитоэлектрический эффект относится к перекрестным эффектам и сам по себе уже представляет интерес для исследований, поскольку наблюдается только в определенных материалах. Магнитоэлектрический эффект заключается в индуцировании электрической поляризации в материале во внешнем магнитном поле или в появлении намагниченности во внешнем электрическом поле:

$$P_i = \alpha_{ij} H_j,$$

$$M_i = \alpha_{ij} \mu_0 E_j,$$

где P_i – электрическая поляризация;

M_i – намагниченность;

E_j – электрическое поля;

H_j – магнитное поля;

α_{ij} – магнитоэлектрическая восприимчивость;

μ_0 – магнитная постоянная.

Для композиционных материалов открываются широкие возможности варьирования их физических свойств, а значит и оптимизации характеристик устройств на их основе.

Магнитоэлектрический эффект в композиционных материалах можно рассматривать как результат взаимодействия пьезоэлектрических и пьезомагнитных свойств. Механизм магнитоэлектрического эффекта состоит в следующем: пьезомагнитный материал деформируется при приложении внешнего магнитного поля. Эта деформация приводит к возникновению механических напряжений в пьезоэлектрической компоненте, а, следовательно, и к электрической поляризации, появляющейся вследствие пьезоэлектрического эффекта. Очевидно, возможен и обратный эффект. Внешнее электрическое поле вызывает

деформацию пьезоэлектрической компоненты, приводящую к возникновению механических напряжений в пьезомагнитной компоненте.

Пьезомагнитная компонента намагничивается благодаря пьезомагнитному эффекту. Таким образом, композиционный материал характеризуется новым свойством – магнитоэлектрическим эффектом, заключающимся в возникновении электрической поляризации во внешнем магнитном поле и в намагничивании во внешнем электрическом поле.

Большинство известных магнитоупорядоченных материалов обладают магнитострикцией. Однако, пьезомагнитный эффект в этих материалах не наблюдается [28]. Это означает, что деформация материала, обусловленная внешним магнитным полем, зависит от величины поля не линейно, а квадратично. По этой причине магнитоэлектрический эффект в композиционных материалах является нелинейным эффектом, в то время как магнитоэлектрический эффект в монокристаллических материалах линейен в широком диапазоне значений электрического и магнитного полей. Это затрудняет использование композитов в линейных устройствах.

Линеаризовать магнитоэлектрические свойства композиционных материалов можно приложением к материалу подмагничивающего поля. В этом случае в интервале магнитных полей, малых по сравнению с подмагничивающим полем, магнитоэлектрический эффект будет близок к линейному.

В работе [29] приведены результаты измерений магнитоэлектрического эффекта в керамических композитах состава $BaTiO_3 - NiFe_2O_4$, легированных кобальтом и марганцем. Максимальная величина магнитоэлектрического коэффициента по напряжению составила $31,4mV/A$. Авторы привели описание особого метода поляризации образцов, в котором изменялась полярность поля при температуре Кюри [30]. Использование поля, создаваемого пространственными зарядами в композите, позволило повысить степень поляризации образца. В работе [31] сообщено об исследовании керамических магнитоэлектрических композитов той же системы с избытком TiO_2 , влиянии размера частиц, скорости охлаждения и молярной концентрации обеих фаз композита. Для керамических композитов состава $BaTiO_3 - Ni(Co, Mn)Fe_2O_4$ удалось получить магнитоэлектрический коэффициент по напряжению $100mV/A$.

Bunget и Raetchi сообщили о наблюдении магнитоэлектрического эффекта в композитах состава Ni-Zn феррит-ЦТС и его зависимости от величины приложенного магнитного поля [32, 33].

Большое значение для решения прикладных задач имеет исследование магнитоэлектрического эффекта в слоистых композитах на основе магнитострикционных металлов (*Fe, Ni, Co*), сплавов (пермендюр, терфенол) и пьезокерамики ЦТС [34-36]. В работах [37-39] получен максимальный магнитоэлектрический эффект величиной 5В/А в многослойных структурах на основе терфенола и ЦТС. Этот результат открывает реальную возможность их практического применения.

Впервые исследование магнитоэлектрического эффекта в слоистых структурах феррит-пьезоэлектрик провели Бичурин М.И., Петров В.М [40]. Детальный анализ резонансных магнитоэлектрических эффектов в парамагнитных и магнитоупорядоченных средах проведен Бичуриным М.И. [41], микроскопическая теория магнитоэлектрического эффекта в области магнитного резонанса в магнитоупорядоченных кристаллах с *3d*-ионами представлена в [42, 43], низкочастотная теория магнитоэлектрического эффекта и дисперсионные свойства в [44], теория магнитоэлектрического эффекта в гомогенных композитах и гетерогенных структурах в [43], применение магнитоэлектрического эффекта и устройства на его основе в [45, 46]. В 2005 г. опубликован обзор Fiebig [47], в котором дан анализ основных работ по композиционным магнитоэлектрическим материалам.

Оценка магнитоэлектрического коэффициента по напряжению в композитах, основанная на приближенной модели, приведена в [48].

Для наблюдения магнитоэлектрического эффекта в композитах, необходимо приложить к образцу постоянное подмагничивающее поле, совпадающее по направлению с переменным магнитным полем. Подмагничивающее поле может быть создано постоянным магнитом или электромагнитом. Bunget и Raetchi предложили другой метод измерений [32, 33]. Поскольку в магнитоэлектрических композитах электрическая поляризация есть функция электрического и магнитного полей, можно приложить их одновременно и измерять поляризацию. Авторы измерили поляризацию, поддерживая электрическое поле постоянным и изменяя магнитное поле. Таким образом, отношение изменения поляризации к приращению магнитного поля дает магнитоэлектрическая восприимчивость.

Newnham et al. предложили классификацию композитов по типам связности [49]. Композит, одна фаза которого имеет связность во всех

трех направлениях (обозначается индексом 3) и изолированной второй фазой, не имеющей связности ни в одном направлении (обозначается индексом 0), называется композитом со связностью типа 3-0. В магнитоэлектрических композитах магнитострикционная фаза, обычно феррит, имеет значительно меньшее сопротивление, чем пьезоэлектрическая фаза. Это ведет к сильной зависимости сопротивления композита от связности фаз, причем самое высокое сопротивление имеет место при последовательном включении компонент композита, самое низкое – при параллельном соединении. Некоторые из ферритов – полупроводники, в которых сопротивление сильно снижается при повышении температуры. Для наблюдения магнитоэлектрического эффекта в композите необходимо его поляризовать, чтобы пьезоэлектрический эффект в пьезоэлектрической компоненте был максимально возможным. Однако, электрическая поляризация этих материалов затруднена уже при комнатной температуре, тем более при более высокой температуре из-за высокой проводимости феррита. Использование композита с типом связности 3-0 позволяет повысить сопротивление и облегчает поляризацию.

В композитах с типом связности 2-2 слои составляющих фаз чередуются, так что каждая фаза имеет связность в двух направлениях в плоскости слоев, но не связана с другим слоем той же самой фазы. В работах Harshe et al. [50, 51] приведены результаты расчета магнитоэлектрического коэффициента по напряжению для композитов с типом связности 2-2. При этом в [50] магнитоэлектрический коэффициент по напряжению вычислялся как отношение индуцированного электрического поля в пьезоэлектрической компоненте к магнитному полю, прикладываемому к магнитной компоненте $aE = \frac{pE}{mH}$.

Известны результаты измерений магнитоэлектрического эффекта в объемных композитах состава $NiFe_2O_4$ или $CoFe_2O_4$ и $BaTiO_3$, полученных спеканием порошка ферритов и титаната бария [52]. Образцы в форме тонких дисков поляризованы электрическим полем перпендикулярно их плоскости. магнитоэлектрический коэффициент измерен для двух случаев: (i) поперечных полей, когда постоянное и переменное магнитные поля параллельны друг другу, а также плоскости диска (1,2) и перпендикулярны переменному электрическому полю (направление 3); (ii) продольных полей, когда все три поля параллельны друг другу и перпендикулярны к плоскости образца. Керамические объемные композиты, вообще говоря,

обнаруживают магнитоэлектрическая связь более слабую, чем расчетные значения [53]. Одна из причин такого положения - низкое удельное сопротивление ферритов, что (i) ограничивает электрическое поле при поляризации образцов, ведя к недостаточной степени поляризации и (ii) ведет к появлению тока утечки в образце, который приводит к уменьшению зарядов, индуцированных посредством пьезоэлектрического эффекта.

Существенным достоинством объемных композиционных материалов является то, что они позволяют посредством выбора компонентов материала с необходимыми значениями электрической и магнитной проницаемостей и путем варьирования процентного содержания компонентов достичь требуемых значений заданного комплекса параметров. Кубические модели феррит-сегнетоэлектрического материала со связностью 3-0 и 0-3 рассмотрены в [53]. В указанной работе произведен численный расчет магнитоэлектрического коэффициента, равного отношению электрического поля, возникающего в композите, к магнитному полю. Однако, построить адекватную теоретическую модель не удалось: экспериментально наблюдаемое значение магнитоэлектрического коэффициента по напряжению ($9,5 \times 10^{-3} \text{ В/А}$) оказалось более чем на два порядка меньше теоретического ($4,5 \text{ В/А}$). В работах Nan et al. развит метод расчета магнитоэлектрического эффекта в объемных композитах на основе функций Грина и теории возмущений [34, 35]. Авторами предложен перспективный трехфазный композиционный материал, обладающий высокими механическими и магнитоэлектрическими свойствами. В работе [54] сообщается об экспериментально измеренном значении магнитоэлектрического коэффициента по напряжению 38 мВ/А для композита состава 0.8 ЦТС - /0.2 феррит кобальта.

Команда китайских ученых с помощью *ab initio* расчетов предсказала магнитоэлектрический эффект в двойном слое графена [55]. Авторами рассмотрены свойства ленты графена зигзагообразной формы, для которой ранее предсказывали наличие двух магнитных подрешеток [56], что дает магнитные моменты противоположного знака на краях ленты. Также появлялись сообщения о скрытых сегнетоэлектрических свойствах такой ленты [57]. Так что вполне логично было задаться вопросом, а не возникает ли в ней под действием электрического поля пропорциональный ему магнитный момент, т.е. имеет ли место линейный магнитоэлектрический эффект?

Оказывается, такой эффект можно смоделировать в системе из двухслойной ленты графена на подложке из кремния. В этом случае

нижний слой ленты образует sp^3 связи с подложкой и не проявляет магнитных свойств, а верхний слой графена, в силу слабости связи с нижележащим слоем, сохраняет свойства свободной ленты и, соответственно, на краях ленты образуются магнитные моменты противоположного знака. Возникает ситуация, при которой, вследствие обменного расщепления, на левом краю электроны со спином вверх формируют валентную зону, а электроны со спином вниз – зону проводимости (у правого края, соответственно, наоборот). Приложение напряжения смещения между подложкой и верхним слоем приводит к тому, что электроны, поступающие из подложки, заполняют преимущественно уровни энергии электронов валентной зоны, тем самым, приводя к изменениям магнитных моментов обоих краев, пропорциональным приложенному полю

В отличие от классического линейного магнитоэлектрического эффекта, обусловленного смещением атомов под действием электрического поля (которое, в свою очередь, изменяет зоны перекрытия электронных облаков и обменное взаимодействие магнитных ионов), в данной разновидности магнитоэлектрического эффекта электрическое поле изменяет обменное расщепление электронных состояний на краю ленты. Отметим здесь, что для обычного линейного магнитоэлектрического эффекта характерна обратимость – электрическая поляризация также может быть порождена магнитным полем, но вопрос об обратимости эффекта в графене остался за пределами рассмотрения работы.

Магнитоэлектрический эффект в материалах может найти широкое применение. Однако, этому препятствует плохая воспроизводимость магнитоэлектрических параметров композитов. Кроме того, фазы композита не должны вступать в химическую реакцию, а для достижения максимального магнитоэлектрического эффекта необходимо хорошее механическое сцепление. Для получения композитов на основе пьезоэлектрической керамики и ферритов путем спекания или методом направленной кристаллизации используется очень высокая температура обработки, при этом сложно избежать химической реакции фаз. Вид связности компонент имеет большое значение для физических параметров, таких как диэлектрическая проницаемость, пьезомодули и, следовательно, магнитоэлектрические коэффициенты.

Возможные применения магнитоэлектрических материалов были рассмотрены ранее [22, 23, 27, 58, 59]. Фазовращатели СВЧ диапазона, построенные на основе магнитоэлектрического материала, рассмотрены в [45]. Разработке магнитоэлектрических датчиков

магнитного поля и СВЧ мощности посвящена работа [46]. Для таких применений магнитоэлектрические композиционные материалы являются наиболее подходящими благодаря широкому рабочему температурному диапазону, а также благодаря более высоким значениям магнитоэлектрических коэффициентов по сравнению с монокристаллическими магнитоэлектрическими материалами.

Разнообразные по физической природе волновые процессы в неоднородных средах, при математическом рассмотрении приводят к уравнениям, имеющим общие свойства. Первые работы по теории волновых процессов были посвящены распространению сигнала по цепочке точечных частиц, и лишь позднее началось изучение распространения волн в сплошных средах. Ньютон в 1686г. при вычислениях скорости звука рассмотрел одномерную решетку [60]. В 1753 году Д. Бернулли установил принцип суперпозиции для колебательных систем, обобщения которого привели к теореме Фурье в 1807 г., однако еще в 1754 г. Клеро в одной из своих работ по небесной механике, оставшейся незамеченной, дал необходимое доказательство указанной теоремы. Эйлер впервые решил задачу о колебаниях струны, а переход от непрерывного к дискретному установил Лагранж, связав результаты работ Бернулли и Эйлера. В 1831 г. Кельвин ввел понятие предельной частоты дискретных структур и объяснил дисперсию света [61]. Эти исследования позволили ему создать современные представления о структуре оптических сред. В 1912 г. М. Борн изучал распространение упругих волн в кристаллах. Дискретные структуры исследовал также Резерфорд [62], где он применял полиномы Чебышева – Гегенбауэра [63]. Подробные исследования волновых явлений акустики, механики, электромагнетизма и квантовой механики в дискретных периодических структурах провели Бриллюэн Л. и Пароди М. [64]. В своих исследованиях они широко использовали полиномы Гегенбауэра-Чебышева. В этой же работе подробно исследуются двух – и трехмерные решетки - однородные кристаллы, уравнения Хилла и Матье [65].

Невозможность точного решения уравнений динамики для неоднородных сред вынуждает прибегать к различным упрощениям и построению приближенных решений. При построении решений волновых уравнений в слоисто-неоднородных средах, когда параметры среды зависят лишь от одной пространственной координаты, широко используется модель кусочно-постоянной или слоисто-однородной среды. В этой модели среда задается пачками однородных слоев, разделенных плоскими границами разрыва параметров среды. Точное

решение волновых уравнений в известных функциях допускает лишь узкий класс неоднородных сред, который практически весь приведен в монографии Бреховских Л.М. [66]. Отдельные случаи, допускающие построения точных решений для упругих сред при учете взаимной трансформации волн, рассмотрены в работе Завадского В.Ю. [67], в случае нормального падения электромагнитной волны на неоднородный диэлектрик в работе Козлова И.П. [68].

Среди методов исследования слоисто-неоднородных изотропных и анизотропных сред, не связанных с матричными методами, отметим применение группы вращения к решению задач отражения света стратифицированной анизотропной средой [69], применение метода возмущения [70], координатного метода [71].

Практически во всех работах рассматриваются частные случаи анизотропии (кубическая, гексагональная) или отсутствуют алгоритмы решения. В работе Петрашениа [72] сделана попытка численной реализации и построения алгоритмов численных расчетов с применением лучевых разложений. В виду громоздкости и малоэффективности эта работа не получила дальнейшего развития.

Одним из наиболее известных специалистов в области изучения волновых процессов в анизотропных средах является академик Федоров Ф. И. Исследования по распространению упругих волн в анизотропных средах изложена в его классической монографии «Теория упругих волн в кристаллах» [73]. Однако даже в этой работе основное внимание уделено закономерностям распространения волн вдоль особых направлений и построению методов определения указанных направлений, что отражает еще раз сложность и разнообразие волновых процессов в упругих анизотропных средах. Следующая монография Федорова Ф.И. «Теория гиротропии» была посвящена изучению электромагнитных волн [74]. В этой работе изложен алгоритм построения точного решения уравнений Максвелла для анизотропных сред. Построенный им алгоритм, в принципе, позволяет получить решения. Однако сам этот алгоритм включает последовательное решение достаточно сложных задач и состоит, по существу, из нескольких самостоятельных проблем.

В случае упругих анизотропных сред описание волновых процессов сводится к исследованию существенно более сложных громоздких уравнений движения среда, чем в случаях изотропии. Если же учесть известный факт, что изучение волновых полей даже в изотропных неоднородных средах – дело далеко не простое, то можно получить некоторое представление о тех затруднениях, с которыми нам предстоит встретиться при установлении основных

закономерностей в распространении волн в упругих анизотропных средах. Подобные затруднения усугубляются вследствие существенно большего разнообразия и протекания волновых процессов, возбуждаемых в таких средах.

Интенсивное развитие и применение в исследовании волновых процессов получили асимптотические методы. Наиболее известным является лучевой метод, предложенный В.М. Бабичем и получившим развитие в его работах с Булдаревым В.С., Молотковым И.А. и др. [75, 76]. Применение различных численных и приближенных методов описаны в работах [77, 78, 79].

Анализ литературы, посвященный изучению волновых процессов в анизотропных средах, показывает, что эти исследования ограничивались распространением волн вдоль особых направлений и построением индикатрис скоростей.

В настоящее время широко известна эффективность матричных методов при исследовании волновых процессов в упругих средах.

Впервые матричный метод был применен Thomson W. T. [80] для численного исследования волнового поля при отражении волн от системы однородных слоев, заключенных между жидкими полупространствами. При этом матричное уравнение, полученное для границ однородных слоев, Томсон обобщил для пачки слоев. В дальнейшем Haskell N. A. применил матричный метод для численного изучения закономерностей распространения упругих поверхностных волн в кристаллах [81].

Матричный метод при исследовании волновых процессов в анизотропных средах в основном применялся при изучении и численном анализе уравнений дисперсии волн, для численного решения высокосимметричных анизотропных средах, определения особых направлений.

С матричным методом непосредственно связаны и другие подходы, которое проводилось Л.М. Бреховских [82] и Kennet V.L.N. [83].

В казахстанской научной школе академика Ержанова Ж.С. вопросы применения матричных методов к исследованию динамики неоднородных сред начали разрабатываться в конце 70-х годов [84 – 94]. Развивается аналитический метод, основанный на построении структуры матрицантов системы обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами, к которой сводятся исходные уравнения, описывающие динамику исследуемого волнового поля. Введения понятия структуры матрицанта и ее определение позволило

распространить классические методы, развитые Бриллюэном и Пароди [64] для дискретных периодических структур, на сплошные периодически неоднородные среды, а также в два раза понизить степень характеристического уравнения, определяющего дисперсию волн, что несомненно, является одним из существенных достоинств и конструктивным отличием этого метода от других его модификаций.

В настоящее время решение широкого круга теоретических и прикладных вопросов динамики сплошных сред требует более полного учета анизотропии и неоднородности физико-механических свойств. Главной особенностью анализа волновых процессов в анизотропных средах является принципиальная не применимость в этих задачах физических представлений и математического аппарата, разработанного для изотропных сред. Это связано с невозможностью разделения волнового поля на прямые и обратные волны. Другой существенной трудностью является обилие физико-механических параметров.

Методом матрицанта рассмотрены задачи распространения волн [84, 95, 96] в упругих анизотропных средах, электромагнитных, электроупругих, пьезоупругих волн в анизотропных диэлектриках [97 – 103], волн в анизотропных термоупругих средах [104 – 111], волн в анизотропных диэлектрических средах с магнитоэлектрическим эффектом [112, 113], изгибных волн в ортотропных пластинах [114, 115].

В зарубежных публикациях Глеукунова С.К. [88, 91, 116 – 122], в частности была определена структура матрицантов уравнений движения неоднородных анизотропных сред. Эти публикации положили начало качественно новому уровню исследований динамики неоднородных сред с применением рассматриваемого метода и единообразному изучению закономерностей распространения волн различной по физической природе, в неоднородных и периодически неоднородных анизотропных средах.

Основным, принципиальным достоинством метода матрицанта является единообразие описания волновых процессов при наличии нескольких физических эффектов: термоупругий, магнитоупругий, пьезоэлектрический и магнитоэлектрический, пьезомагнитный и магнитоэлектрический эффекты [123 – 130].

Актуальность темы. Широкое применение лазерного (электромагнитного) излучения в науке и технике требует знания ясной физической картины волновых процессов в самых разнообразных средах.

Тема настоящей работы посвящена исследованию особенностей распространения электромагнитных волн в диэлектрических анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом.

Изучение закономерностей распространения электромагнитного излучения в средах с различными физическими свойствами позволяет анализировать оптические свойства различных систем, а так же конструировать устройства, управляющие различными характеристиками излучения.

В связи со сказанным, развитие и применение аналитических методов исследования, а также формирование представлений о поведении электромагнитных волн в анизотропных средах с учетом магнитоэлектрического эффекта являются актуальным.

Научная новизна. Научная новизна работы заключается в приложении метода матрицанта к изучению распространения электромагнитных волн в анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом; получении инвариантных соотношений, имеющих место в рассматриваемом процессе, и отражающие законы сохранения; матричной формулировки граничных условий; аналитическом решена задача отражения и преломления электромагнитных волн на границе изотропной среды и анизотропной среды с магнитоэлектрическим эффектом.

Цель исследования. Целью работы является теоретическое изучение стационарных волновых решений уравнений Максвелла для анизотропных сред с магнитоэлектрическим эффектом методом матрицанта, разработанного профессором С. К. Тлеукуновым.

Метод исследования. Метод исследования работы – аналитический, основанный на развитии матричных методов исследования динамики упругих слоистых сред.

Суть метода заключается в приведении исходных уравнений Максвелла, на основе метода разделения переменных, к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка с переменными коэффициентами и построении структуры матрицанта.

Матричный метод позволяет при едином подходе рассматривать распространение волн в широком классе сред. Другое достоинство этого метода состоит в том, что выражения, полученные матричным методом, имеют весьма компактную форму, которая оказывается удобной как при аналитических исследованиях, так и при численных расчетах.

Объект исследования. Объектом исследования работы является распространение монохроматических электромагнитных волн в

анизотропных диэлектрических средах с магнитоэлектрическим эффектом тетрагональной, тригональной и гексагональной сингоний.

Изучение закономерностей распространения электромагнитных волн основано на:

- исследовании структуры матриц коэффициентов, описывающих распространение электромагнитных волн вдоль оси Z анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом тетрагональной, тригональной и гексагональной сингоний;

- определении структуры матрицантов в зависимости от структуры матриц коэффициентов;

- исследовании распространения волн в периодически неоднородных средах, основанный на аналитическом представлении матрицанта;

- построении уравнений дисперсии электромагнитных волн в случае неограниченной периодически неоднородной анизотропной среды с магнитоэлектрическим эффектом;

- решении задачи отражения и преломления электромагнитных волн на границе изотропной среды и анизотропной среды с магнитоэлектрическим эффектом.

Теоретическая и практическая значимость исследования.

Структура фундаментальных решений и явный вид аналитических представлений матрицанта позволяет исследовать распространение электромагнитных волн в однородных и периодически неоднородных анизотропных средах. Результаты, полученные в работе могут быть применены в теоретических расчетах при проектировании и изготовлении различных приборов и устройств.

2 Распространение электромагнитных волн в анизотропной среде с магнитоэлектрическим эффектом

2.1 Симметрия кристаллов

Твёрдые тела (монокристаллы) отличаются анизотропией в своих свойствах. Иными словами свойства монокристалла различны в разных направлениях. В частности, поляризуемость кристалла, вообще говоря, не одинакова в разных направлениях. Анизотропия в свойствах монокристалла связана с характером его внутренней структуры, т. е. с наличием кристаллической решётки. Анизотропность среды может также создаваться наложением внешних полей: магнитных (эффект Коттона-Мутона), электрических (эффект Керра), упругих деформаций (впервые исследовали Зеебек и Брюстер).

Анизотропия в поляризуемости кристалла проявляется, в частности, в том, что если вырезать из монокристалла две пластинки, различно ориентированные относительно кристаллографических осей, и поместить сначала одну, а затем и другую между обкладками конденсатора, то ёмкость конденсатора в обоих случаях, вообще говоря, не одинакова. Отсюда следует, что диэлектрическая проницаемость, а, следовательно, и диэлектрическая восприимчивость кристалла различны в разных направлениях. Исключение составляют кристаллы кубической сингонии, которые ведут себя как изотропные тела. Если взять, например, кристалл берилла $(SiO_3)6Al_2Be_3$, принадлежащего к гексагональной системе, то его диэлектрическая проницаемость равна 7,44 и 7,85 в зависимости от того, параллельно или перпендикулярно электрическое поле оси шестого порядка. Для апатита диэлектрическая проницаемость при поле, направленном вдоль оси, равна 7,4, а при поле перпендикулярном оси равна 9,5. особенно велика разница в значениях диэлектрической проницаемости у рутила TiO_2 , принадлежащего тетрагональной системе. Если поле направлено вдоль оси (4-го порядка) диэлектрическая проницаемость равна 173, если же поле направлено перпендикулярно оси, то диэлектрическая проницаемость равна 89.

Анизотропия поляризуемости характерна для монокристалла. В поликристаллах, состоящих из большого числа маленьких кристаллитов, произвольно ориентированных друг относительно друга, происходит усреднение поляризуемости, и такие кристаллы ведут себя в электрическом поле как изотропные тела (газы, жидкости, аморфные тела).

Анизотропия поляризуемости приводит к анизотропии диэлектрической проницаемости, т.к. электрическая индукция \vec{D} связана с поляризованностью \vec{P} и напряжённостью электрического поля \vec{E} соотношением: $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$, независимо от того изотропно тело или анизотропно. Из этого следует, что в слабых полях между векторами \vec{D} и \vec{E} имеет место линейная связь, но эти векторы, вообще говоря, не параллельны. Нумеруя координаты (x, y, z) цифрами 1,2,3, можно представить эту связь в виде:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j. \quad (2.1)$$

Для большинства веществ магнитная индукция \vec{B} является линейной функцией напряжённости поля вплоть до её очень больших значений, и только для ферромагнетиков линейная зависимость наблюдается при малой напряжённости поля и очень быстро сменяется сложной нелинейной зависимостью. Для монокристаллов векторы \vec{B} и \vec{H} не параллельны, хотя связь между ними по-прежнему считается линейной. В этом случае декартовы составляющие B_i, H_j ($i, j = x, y, z$) векторов \vec{B} и \vec{H} связаны между собой линейными соотношениями

$$B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j \quad (2.2)$$

Тензор μ_{ij} характеризует магнитные свойства вещества и называется тензором магнитной проницаемости.

Если среда является проводящей, то к материальным уравнениям (2.1) и (2.2) необходимо добавить зависимость между плотностью тока и вектором напряжённости электрического поля (закон Ома):

$$j_i = \sigma_{ij} E_j, \quad (2.3)$$

где σ_{ij} – тензор электропроводности.

Закономерности распространения волн в различных анизотропных средах определяются структурой тензоров $\hat{\varepsilon}, \hat{\mu}$ и $\hat{\sigma}$, а также зависимостью компонент этих тензоров от частоты и волнового вектора (уравнениями дисперсии):

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(\omega, \vec{k}),$$

$$\mu_{ij} = \mu_{ij}(\omega, \vec{k}),$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(\omega, \vec{k}) \quad (i, j = 1, 2, 3 \text{ или } i, j = x, y, z).$$

Электромагнитные волны в материальных средах описываются уравнениями Максвелла:

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{E} &= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{B} &= 0, \\ \operatorname{rot} \vec{H} &= \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, & \operatorname{div} \vec{D} &= \rho, \end{aligned} \quad (2.4)$$

где ρ – объёмная плотность зарядов;

\vec{j} – вектор плотности тока.

Основной темой исследований настоящей работы является изучение фундаментальных свойств решений уравнений Максвелла, описывающих свободные электромагнитные поля в неподвижных анизотропных средах, с тензорными характеристиками, зависящими от одной из пространственных координат (координаты z). При этом функции $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}(z)$, $\mu_{ij} = \mu_{ij}(z)$, $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}(z)$, в общем случае полагаются кусочно-непрерывными.

Рассматривая проводящие среды, будем учитывать лишь наведённые токи. Объёмную плотность зарядов будем считать равной нулю ($\rho = 0$). Тензорные характеристики будем полагать симметричными, т.е.

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}, \quad \mu_{ij} = \mu_{ji}, \quad \sigma_{ij} = \sigma_{ji}. \quad (2.5)$$

Анизотропные среды характеризуются обилием параметров. Одним из конструктивных путей преодоления этих трудностей является последовательное и детальное изучение свойств решений уравнений Максвелла в достаточно широком классе анизотропных сред с тем, чтобы установить закономерности этих решений от структуры тензорных величин, определяющих анизотропию среды.

Естественно, что такое изучение целесообразно проводить на базе возможно более простых волн достаточно общей природы. В данном исследовании рассматриваются гармонически зависящие от времени решения уравнений Максвелла и метод разделения переменных относительно пространственных координат.

С учётом высказанных выше исходных положений представление решений волновых полей $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$ рассматриваются в виде:

$$\vec{f} = \vec{f}(z)e^{i(\omega t \pm k_x x \pm k_y y)}, \quad (2.6)$$

где ω – частота;

k_x, k_y – соответственно x - и y - компоненты волнового вектора.

Свойства среды от координат x и y не зависят, т.е. среда полагается неоднородной вдоль оси Oz .

Таким образом, уравнения Максвелла принимают вид:

$$\begin{aligned} \text{rot}\vec{E} &= -i\omega\vec{B}, & \text{rot}\vec{H} &= i\omega\vec{D} + \vec{j}, \\ \text{div}\vec{B} &= 0, & \text{div}\vec{D} &= 0. \end{aligned} \quad (2.7)$$

Исходной системой являются уравнения Максвелла (2.7) и материальные уравнения (2.1), (2.2), (2.3). При этом будем учитывать соотношения (2.5) и (2.6), а также отсутствие токов ($\vec{j} = 0$).

Указанная система уравнений требует некоторых уточнений и пояснений. Дело в том, что эта система состоит из 14 уравнений относительно 12 компонент электрических и магнитных полей.

Кажущаяся переопределённость системы связана с тем, что последние два уравнения в (2.7), в данном случае, является следствием первых двух. Действительно, взяв операцию дивергенции от левых частей первой пары уравнений (2.7), получим:

$$\text{divrot}\vec{E} = 0, \quad \text{divrot}\vec{H} = 0,$$

что автоматически даёт

$$\text{div}\vec{B} = 0, \quad \text{div}\vec{D} = 0.$$

2.2 Тензорные характеристики

При линейной зависимости между векторами \vec{D} и \vec{E} , из независимости второй производной от свободной энергии F по компонентам вектора \vec{E} при неизменных значениях температуры и плотности следует симметричность компонентов тензора диэлектрической проницаемости:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial^2 F}{\partial E_i \partial E_j} \right)_{T, \rho} = \left(\frac{\partial^2 F}{\partial E_j \partial E_i} \right)_{T, \rho} .$$

Для описания диэлектрических свойств кристаллов *триклинной* сингонии и, в целом, анизотропных сред с аналогичными свойствами тензор (второго ранга) диэлектрической проницаемости имеет шесть независимых компонент:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_z \end{bmatrix} . \quad (2.8)$$

Для кристаллов *моноклинной* сингонии, в случае, когда ось симметрии второго порядка $A_2 \parallel Ox$ или при совпадении плоскости симметрии с плоскостью (Oxz):

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ 0 & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_z \end{bmatrix} . \quad (2.9)$$

При условии $A_2 \parallel Oz$, тензор диэлектрической проницаемости:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} . \quad (2.10)$$

Если же двукратной осью симметрии является ось Oy или когда плоскость симметрии совпадает с плоскостью (Oxz), то имеем матрицу:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & \varepsilon_{xz} \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ \varepsilon_{xz} & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix}. \quad (2.11)$$

Таким образом, анизотропные диэлектрические кристаллы моноклинной сингонии имеют четыре независимых компонента тензора диэлектрической проницаемости.

Ромбическая сингония классов (222) и (*mm2*) характеризуется тензором $\hat{\varepsilon}$ вида:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

Анизотропные кристаллы, относящиеся к тетрагональной, тригональной и гексагональной сингонии, описываются тензором диэлектрической проницаемости, имеющим всего две независимые компоненты

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_x & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

Для кристаллов кубической сингонии:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}. \quad (2.14)$$

2.3 Исходные соотношения и приведение их к системе уравнений в матричной форме

Рассмотрим решение волновых полей $\vec{E}, \vec{H}, \vec{B}, \vec{D}$ в виде:

$$\vec{F} = \vec{F}(z)e^{i\omega t \pm ik_x x \pm ik_y y}, \quad (2.15)$$

где ω – частота;

k_x, k_y – соответственно x - и y - компоненты волнового вектора.

Свойства среды от координат x и y не зависят, т.е. предполагается, что среда неоднородна вдоль оси z .

При отсутствии объемной плотности зарядов ρ , вектора плотности токов и гармонической зависимости решений волновых полей от времени уравнения Максвелла принимают вид:

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -i\omega \vec{B}, \quad \operatorname{rot} \vec{H} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = i\omega \vec{D}, \quad (2.16)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0, \quad \operatorname{div} \vec{D} = 0. \quad (2.17)$$

Причем нужно отметить, что последняя пара уравнений (2.17), в данном случае, является следствием первой пары уравнений (2.16).

К данным уравнения необходимо добавить материальные уравнения:

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j, \\ B_j = \mu_0 \mu_{ij} H_i, \quad (2.18)$$

Материальное уравнение $j_i = \sigma_{ij} E_j$ не рассматривается, так как среда полагается непроводящей.

Магнитоэлектрический эффект состоит в линейной связи между магнитными и электрическими полями в веществе; она приводит, например, к появлению в электрическом поле пропорциональной ему намагниченности.

Материальные уравнения связывающие \vec{B} и \vec{H} , \vec{D} и \vec{E} получаем из свободной энергии

$$F = F_{эм} + F_{мэ} \quad (2.19)$$

где $F_{эм}$ – свободная энергия для электромагнитного поля.

$$F_{эм} = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_i E_j + \mu_0 \mu_{ij} H_i H_j. \quad (2.20)$$

$F_{мэ}$ – свободная энергия для поля с магнитоэлектрическим эффектом.

$$F_{мэ} = -\alpha_{ik} E_i H_k. \quad (2.21)$$

Тогда материальные уравнения принимают вид:

$$\frac{\partial F}{\partial E_i} = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j - \alpha_{ij} H_j = D_i, \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial F}{\partial H_i} = \mu_0 \mu_{ij} H_j - \alpha_{ij} E_i = B_j, \quad (2.23)$$

где $\varepsilon_{ij}, \mu_{ij}$ – компоненты тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости;

α_{ik} – компонент несимметричного тензора магнитоэлектрического эффекта.

Для анизотропных диэлектриков с магнитоэлектрическим эффектом тетрагональной, тригональной и гексагональной сингонии:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_1 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\mu} = \begin{bmatrix} \mu_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_1 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_2 \end{bmatrix} \quad \hat{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_2 \end{bmatrix}. \quad (2.24)$$

На основе метода матрицанта систему уравнений, описывающая распространение электромагнитных волн, можно привести к эквивалентной системе дифференциальных уравнений:

$$\frac{d\vec{U}}{dz} = B\vec{U} \quad \vec{U} = (E_y, H_x, H_y, E_x). \quad (2.25)$$

Решая в системе соотношения (2.16), (2.18), (2.22), (2.23) получим следующие вычисления:

$$\begin{aligned}
\text{rot}\vec{E} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ E_x & E_y & E_z \end{pmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial E_z}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) = \\
&= \vec{i} \left(-ik_y E_z - \frac{dE_y}{dz} \right) - \vec{j} \left(-ik_x E_z - \frac{dE_x}{dz} \right) + \vec{k} (-ik_x E_y + ik_y E_x), \\
\frac{dE_y}{dz} &= -ik_y E_z + i\varpi\mu_0\mu_1 H_x - i\varpi\alpha_{\perp} E_x, \tag{2.26}
\end{aligned}$$

$$\frac{dE_x}{dz} = -ik_x E_z - i\varpi\mu_0\mu_1 H_y + i\varpi\alpha_{\perp} E_y, \tag{2.27}$$

$$-ik_x E_y + ik_y E_x = -i\varpi\mu_0\mu_2 H_z + i\varpi\alpha_{11} E_z, \tag{2.28}$$

$$\begin{aligned}
\text{rot}\vec{H} &= \begin{pmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ H_x & H_y & H_z \end{pmatrix} = \vec{i} \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) - \vec{j} \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial z} \right) + \vec{k} \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) = \\
&= \vec{i} \left(-ik_y H_z - \frac{dH_y}{dz} \right) - \vec{j} \left(-ik_x H_z - \frac{dH_x}{dz} \right) + \vec{k} (-ik_x H_y + ik_y H_x),
\end{aligned}$$

$$\frac{dH_y}{dz} = -ik_y H_z - i\varpi\varepsilon_0\varepsilon_1 E_x + i\varpi\alpha_{\perp} H_x, \tag{2.29}$$

$$\frac{dH_x}{dz} = -ik_x H_z + i\varpi\varepsilon_0\varepsilon_1 E_y - i\varpi\alpha_{\perp} H_y, \tag{2.30}$$

$$-ik_x H_y + ik_y H_x = i\varpi\varepsilon_0\varepsilon_2 E_z - i\varpi\alpha_{11} H_z. \tag{2.31}$$

В уравнениях (2.27) и (2.30) выразим H_z и E_z

$$H_z = \frac{\varepsilon_0\varepsilon_2 k_y E_x - \varepsilon_0\varepsilon_2 k_x E_y - \alpha_{11} k_y H_x + \alpha_{11} k_x H_y}{\beta}, \tag{2.32}$$

$$E_z = \frac{\alpha_{11}k_y E_x - \alpha_{11}k_x E_y - \mu_0\mu_2k_y H_x + \mu_0\mu_2k_x H_y}{\beta}, \quad (2.33)$$

где $\beta = \omega(\alpha_{11}^2 - \varepsilon_0\varepsilon_2\mu_0\mu_2)$

В соотношения (2.26), (2.27), (2.29), (2.30) вставляем (2.32) и (2.33). Тогда

$$\frac{dE_y}{dz} = i \left[\frac{k_x k_y}{\beta} \alpha_{11} E_y + \mu_0 \left(\frac{k_y^2}{\beta} \mu_2 + \omega \mu_1 \right) H_x - \frac{k_x k_y}{\beta} \mu_0 \mu_2 H_y - \left(\frac{k_y^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) E_x \right]$$

$$\frac{dH_x}{dz} = i \left[\varepsilon_0 \left(\frac{k_x^2}{\beta} \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1 \right) E_y + \frac{k_x k_y}{\beta} \alpha_{11} H_x - \left(\frac{k_x^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) H_y - \frac{k_x k_y}{\beta} \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_x \right]$$

$$\frac{dH_y}{dz} = i \left[\frac{k_x k_y}{\beta} \varepsilon_0 \varepsilon_2 E_y + \left(\frac{k_y^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) H_x - \frac{k_x k_y}{\beta} \alpha_{11} H_y - \varepsilon_0 \left(\frac{k_x^2}{\beta} \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1 \right) E_x \right]$$

$$\frac{dE_x}{dz} = i \left[\left(\frac{k_x^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) E_y + \frac{k_x k_y}{\beta} \mu_0 \mu_2 H_x - \mu_0 \left(\frac{k_x^2}{\beta} \mu_2 + \omega \mu_1 \right) H_y - \frac{k_x k_y}{\beta} \alpha_{11} E_x \right]$$

Получена матрица коэффициентов \hat{B} в виде:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{11} & b_{23} & b_{24} \\ -b_{24} & -b_{14} & -b_{11} & b_{34} \\ -b_{23} & -b_{13} & b_{43} & -b_{11} \end{pmatrix}, \quad (2.34)$$

где

$$b_{11} = i \frac{k_x k_y}{\beta} \alpha_{11} \quad b_{12} = i \mu_0 \left(\frac{k_y^2}{\beta} \mu_2 + \omega \mu_1 \right) \quad b_{13} = -i \frac{k_x k_y}{\beta} \mu_0 \mu_2$$

$$b_{14} = -i \left(\frac{k_y^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right) \quad b_{21} = i \varepsilon_0 \left(\frac{k_x^2}{\beta} \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1 \right) \quad b_{23} = -i \left(\frac{k_x^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right)$$

$$b_{24} = -i \frac{k_x k_y}{\beta} \varepsilon_0 \varepsilon_2 \quad b_{34} = -i \varepsilon_0 \left(\frac{k_y^2}{\beta} \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1 \right)$$

$$b_{43} = -i \mu_0 \left(\frac{k_x^2}{\beta} \mu_2 + \omega \mu_1 \right)$$

Распространение волн в координатных плоскостях описывается матрицей \hat{B} :

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & -b_{14} & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (2.35)$$

При распространениях волны в плоскости xz ($k_y = 0$) элементы матрицы имеют вид:

$$\begin{aligned} b_{12} &= i \omega \mu_0 \mu_1, & b_{14} &= -i \omega \alpha_{\perp}, \\ b_{21} &= i \varepsilon_0 \left(\frac{k_x^2}{\beta} \varepsilon_2 + \omega \varepsilon_1 \right), & b_{23} &= -i \left(\frac{k_x^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right), \\ b_{34} &= -i \omega \varepsilon_0 \varepsilon_1, & b_{43} &= -i \mu_0 \left(\frac{k_x^2}{\beta} \mu_2 + \omega \mu_1 \right). \end{aligned} \quad (2.36)$$

При распространениях волны в плоскости yz ($k_x = 0$) элементы матрицы имеют вид:

$$b_{12} = i \mu_0 \left(\frac{k_y^2}{\beta} \mu_2 + \omega \mu_1 \right), \quad b_{14} = -i \left(\frac{k_y^2}{\beta} \alpha_{11} + \omega \alpha_{\perp} \right),$$

$$\begin{aligned}
b_{21} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1, & b_{23} &= -i\omega\alpha_{\perp}, \\
b_{34} &= -i\varepsilon_0\left(\frac{k_y^2}{\beta}\varepsilon_2 + \omega\varepsilon_1\right), & b_{12} &= -i\omega\mu_0\mu_1.
\end{aligned} \quad (2.37)$$

2.4 Структура матрицанта

Как было выше сказано, уравнения Максвелла с учётом материальных уравнений приводятся к системе четырёх обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\vec{u}}{dz} = \hat{B}\vec{u}, \quad \vec{u} = (E_y, H_x, H_y, E_x)^t. \quad (2.38)$$

Нормированное решение этой системы (матрицант), т.е. решение, обращающееся в единичную матрицу при $z = z_0$, где z_0 – фиксированное число из интервала (z_1, z_2) , строится методом последовательных приближений. Любое решение, имеющее смысл матрицы фундаментальных решений имеет вид:

$$\hat{X} = \hat{T} \cdot \hat{C},$$

где $\hat{T} = \hat{T}(z, z_0)$ – матрицант;

\hat{C} – произвольная постоянная матрица.

В дальнейшем, для краткости, матрицанты и матрицы коэффициентов будем обозначать без символа \hat{B}, \hat{T}

Исходя из рекуррентных соотношений

$$\frac{d\hat{T}_k}{dz} = \hat{B}\hat{T}_{k-1} \quad \Leftrightarrow \quad \hat{T}_k = \hat{E} + \int_{z_0}^z \hat{B}(z_1)\hat{T}_{k-1}(z_1)dz \quad (k=1,2,\dots), \quad (2.39)$$

получаем матрицант в форме бесконечного матричного экспоненциального ряда [95]:

$$\hat{T} = \hat{E} + \int_0^z \hat{B}dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} \hat{B}(z_1)\hat{B}(z_2)dz_1dz_2 + \dots \quad (2.40)$$

Аналогичное рекуррентное соотношение справедливо и для построения обратного матрицанта

$$\frac{d\hat{T}^{-1}_k}{dz} = -\hat{T}^{-1}_{k-1}\hat{B} \Leftrightarrow \hat{T}^{-1}_k = \hat{E} - \int_{z_0}^z \hat{T}^{-1}_{k-1}(z_1)\hat{B}(z_1)dz, \quad (2.41)$$

$$\hat{T}^{-1} = \hat{E} - \int_0^z \hat{B}dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} \hat{B}(z_2)\hat{B}(z_1)dz_1dz_2 - \dots \quad (2.42)$$

Каждый из этих рядов есть сумма матриц

$$\hat{T} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}_{(n)}, \quad \hat{T}^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}_{(n)}^{-1}.$$

Индекс n совпадает с числом перемножаемых под знаком интеграла матриц $\hat{B}(z_i)$. В дальнейшем выделяются члены рядов с чётными и нечётными значениями n :

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\div} &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}_{(2n)}, \quad \hat{T}_{i\grave{a}\div} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}_{(2n+1)}, \\ \hat{T}^{-1}_{\div} &= \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}_{(2n)}^{-1}, \quad \hat{T}^{-1}_{i\grave{a}\div} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{T}_{(2n+1)}^{-1} \end{aligned} \quad (2.43)$$

и имеет место представление:

$$\hat{T} = \hat{T}_{\div} + \hat{T}_{\text{неч}}, \quad \hat{T}^{-1} = \hat{T}_{\text{чет}}^{-1} + \hat{T}_{\text{неч}}^{-1} \quad (2.44)$$

Структура матрицанта есть зависимость между элементами прямого и обратного матрицантов, а также зависимости между элементами \hat{T} и \hat{T}^{-1} , следующими из тождества:

$$\hat{T}\hat{T}^{-1} = \hat{T}^{-1}\hat{T} = \hat{E} \quad (2.45)$$

Структура матрицанта уравнений Максвелла для анизотропной, неоднородной среды строится методом математической индукции на основе поэлементного сравнения матриц каждого из слагаемых рядов (2.39) и (2.41), исходя из структуры матрицы коэффициентов. В случае триклинной сингонии, когда матрица коэффициентов имеет наиболее общий вид

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{11} & b_{23} & b_{24} \\ -b_{24} & -b_{14} & b_{33} & b_{34} \\ -b_{23} & -b_{13} & b_{43} & b_{33} \end{bmatrix}, \quad (2.46)$$

$$\hat{T}^{-1} = \begin{bmatrix} t_{22} & t_{12} & -t_{42} & -t_{32} \\ t_{21} & t_{11} & -t_{41} & -t_{31} \\ -t_{24} & -t_{14} & t_{44} & t_{34} \\ -t_{23} & -t_{13} & t_{43} & t_{33} \end{bmatrix}_y - \begin{bmatrix} t_{22} & t_{12} & -t_{42} & -t_{32} \\ t_{21} & t_{11} & -t_{41} & -t_{31} \\ -t_{24} & -t_{14} & t_{44} & t_{34} \\ -t_{23} & -t_{13} & t_{43} & t_{33} \end{bmatrix}_{неч}, \quad (2.47)$$

где t_{ij} —элементы прямого матрицанта T :

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}_z + \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{bmatrix}_{i\hat{a}}. \quad (2.48)$$

Структура матрицанта отражает фундаментальные свойства решений системы и внутреннюю структуру уравнений Максвелла для неоднородных анизотропных сред. Главная особенность структуры (2.46) и соотношений, вытекающих из (2.45), — в их инвариантности относительно конкретного вида неоднородности.

Из тождеств (2.45) можно получить следующие независимые инвариантные соотношения:

$$\begin{aligned} t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21} - t_{13}t_{24} - t_{14}t_{23} &= 1; & -t_{21}t_{42} - t_{22}t_{41} + t_{23}t_{44} + t_{24}t_{43} &= 0; \\ t_{11}t_{12} &= t_{13}t_{14}; & -t_{21}t_{32} - t_{22}t_{31} + t_{23}t_{34} + t_{24}t_{33} &= 0; \\ -t_{11}t_{42} - t_{12}t_{41} + t_{13}t_{44} + t_{14}t_{43} &= 0; & -t_{31}t_{42} - t_{32}t_{41} + t_{33}t_{44} + t_{34}t_{43} &= 1; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
-t_{11}t_{32} - t_{12}t_{31} + t_{13}t_{34} + t_{14}t_{33} &= 0; & t_{33}t_{34} &= t_{32}t_{31}; \\
t_{22}t_{21} &= t_{24}t_{23}; & t_{42}t_{41} &= t_{44}t_{43}.
\end{aligned}
\tag{2.49}$$

Тождества (2.45) и вытекающие из них инвариантные соотношения (2.49) отражают внутреннюю симметрию уравнений (2.42) и содержат в себе законы сохранения.

Структура матрицанта для анизотропных сред различных сингоний

Для кристаллов, которым соответствуют матрицы коэффициентов

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{11} & b_{23} & b_{24} \\ -b_{24} & -b_{14} & b_{33} & b_{34} \\ -b_{23} & -b_{13} & b_{43} & b_{33} \end{bmatrix} \tag{2.50}$$

$$\hat{B}_{(xz)} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & b_{23} & b_{24} \\ -b_{24} & 0 & b_{33} & b_{34} \\ -b_{23} & 0 & b_{43} & b_{33} \end{bmatrix}; \tag{2.51}$$

$$\hat{B}_{(yz)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & b_{11} & 0 & b_{24} \\ -b_{24} & -b_{14} & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 \end{bmatrix}; \tag{2.52}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{11} & b_{23} & b_{24} \\ -b_{24} & 0 & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & -b_{13} & b_{43} & 0 \end{bmatrix}; \tag{2.53}$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ -b_{24} & -b_{14} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & -b_{13} & b_{43} & b_{33} \end{bmatrix}; \tag{2.54}$$

$$\hat{B}_{(xz)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{11} & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & -b_{13} & b_{43} & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.55)$$

$$\hat{B}_{(yz)} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{14} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & -b_{13} & b_{43} & b_{33} \end{bmatrix}; \quad (2.56)$$

$$\hat{B}_{(xz)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{11} & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & -b_{13} & b_{43} & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.57)$$

$$\hat{B}_{(yz)} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -b_{14} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & -b_{13} & b_{43} & b_{33} \end{bmatrix}; \quad (2.58)$$

$$\hat{B}_{(xz)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & b_{11} & b_{23} & b_{24} \\ -b_{24} & 0 & b_{33} & b_{34} \\ -b_{23} & -b_{13} & b_{43} & b_{33} \end{bmatrix}; \quad (2.59)$$

$$\hat{B}_{(yz)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} \\ b_{21} & b_{11} & 0 & b_{24} \\ b_{24} & b_{14} & b_{33} & b_{34} \\ 0 & b_{13} & b_{43} & b_{33} \end{bmatrix}; \quad (2.60)$$

матрицанты имеют общий вид (2.47) и (2.48).

Если же матрица коэффициентов имеет вид

$$\hat{B}_{(Oz)} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ -b_{24} & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.61)$$

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ -b_{24} & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & -b_{13} & b_{43} & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.62)$$

$$\hat{B}_{(xz)} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ -b_{24} & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.63)$$

$$\hat{B}_{(yz)} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ -b_{24} & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.64)$$

$$\hat{B}_{(Oz)} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & -b_{13} & b_{43} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.65)$$

$$\hat{B}_{(Oz)} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & -b_{13} & b_{43} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.66)$$

$$\hat{B}_{(Oz)} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{14} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.67)$$

то матрицанты принимают вид:

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & 0 & t_{14} \\ 0 & t_{22} & t_{23} & 0 \\ 0 & t_{32} & t_{33} & 0 \\ t_{41} & 0 & 0 & t_{44} \end{bmatrix}_{\div} + \begin{bmatrix} 0 & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & t_{24} \\ t_{31} & 0 & 0 & t_{34} \\ 0 & t_{42} & t_{43} & 0 \end{bmatrix}_{i\hat{a}\div}, \quad (2.68)$$

$$\hat{T}^{-1} = \begin{bmatrix} t_{22} & 0 & 0 & -t_{32} \\ 0 & t_{11} & -t_{41} & 0 \\ 0 & -t_{14} & t_{44} & 0 \\ -t_{23} & 0 & 0 & t_{33} \end{bmatrix}_{\div} - \begin{bmatrix} 0 & t_{12} & -t_{42} & 0 \\ t_{21} & 0 & 0 & -t_{31} \\ -t_{24} & 0 & 0 & t_{34} \\ 0 & -t_{13} & t_{43} & 0 \end{bmatrix}_{i\hat{a}\div}. \quad (2.69)$$

В тех случаях, когда матрица коэффициентов принимает вид

$$\hat{B}_{(xz)} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & 0 & b_{43} & 0 \end{bmatrix}; \quad (2.70)$$

$$\hat{B}_{(yz)} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{14} & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 \end{bmatrix} \quad (2.71)$$

матрицанты представимы в виде:

$$\hat{T} = \begin{bmatrix} t_{11} & 0 & t_{13} & 0 \\ 0 & t_{22} & 0 & t_{24} \\ t_{31} & 0 & t_{33} & 0 \\ 0 & t_{42} & 0 & t_{44} \end{bmatrix}_{i\dot{a}} + \begin{bmatrix} 0 & t_{12} & 0 & t_{14} \\ t_{21} & 0 & t_{23} & 0 \\ 0 & t_{32} & 0 & t_{34} \\ t_{41} & 0 & t_{43} & 0 \end{bmatrix}_{i\dot{a}}, \quad (2.72)$$

$$\hat{T}^{-1} = \begin{bmatrix} t_{22} & 0 & -t_{42} & 0 \\ 0 & t_{11} & 0 & -t_{31} \\ -t_{24} & 0 & t_{44} & 0 \\ 0 & -t_{13} & 0 & t_{33} \end{bmatrix}_{i\dot{a}} - \begin{bmatrix} 0 & t_{12} & 0 & -t_{32} \\ t_{21} & 0 & -t_{41} & 0 \\ 0 & -t_{14} & 0 & t_{34} \\ -t_{23} & 0 & t_{43} & 0 \end{bmatrix}_{i\dot{a}}. \quad (2.73)$$

В том случае, если матрица коэффициентов имеет вид

$$\hat{B}_{(xz)} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & b_{33} \end{bmatrix}; \quad (2.74)$$

матрицант представим в виде:

$$\hat{T} = \begin{pmatrix} T^{(1)} & 0 \\ 0 & T^{(2)} \end{pmatrix},$$

$$\hat{T}^{(1)} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}_{i\dot{a}} + \begin{pmatrix} 0 & t_{12} \\ t_{21} & 0 \end{pmatrix}_{i\dot{a}}, \quad \hat{T}^{(1)-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 \\ 0 & t_{11} \end{pmatrix}_{i\dot{a}} - \begin{pmatrix} 0 & t_{12} \\ t_{21} & 0 \end{pmatrix}_{i\dot{a}},$$

$$\hat{T}^{(2)} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}_{i\dot{a}} + \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}_{i\dot{a}}, \quad \hat{T}^{(2)-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & t_{12} \\ t_{21} & t_{11} \end{pmatrix}_{i\dot{a}} - \begin{pmatrix} t_{22} & t_{12} \\ t_{21} & t_{11} \end{pmatrix}_{i\dot{a}}$$

В случае матрицы коэффициентов

$$\hat{B}_{(yz)} = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.75)$$

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}_q + \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}_{неч}, \quad T^{(1)-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & t_{12} \\ t_{21} & t_{11} \end{pmatrix}_q - \begin{pmatrix} t_{22} & t_{12} \\ t_{21} & t_{11} \end{pmatrix}_{неч},$$

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}_q + \begin{pmatrix} 0 & t_{12} \\ t_{21} & 0 \end{pmatrix}_{неч}, \quad T^{(2)-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 \\ 0 & t_{11} \end{pmatrix}_q - \begin{pmatrix} 0 & t_{12} \\ t_{21} & 0 \end{pmatrix}_{неч}.$$

Если же матрица коэффициентов имеет вид

$$\hat{B} = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 \end{bmatrix}. \quad (2.76)$$

то

$$T^{(1)} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}_q + \begin{pmatrix} 0 & t_{12} \\ t_{21} & 0 \end{pmatrix}_{неч}, \quad T^{(1)-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 \\ 0 & t_{11} \end{pmatrix}_q - \begin{pmatrix} 0 & t_{12} \\ t_{21} & 0 \end{pmatrix}_{неч},$$

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} t_{11} & 0 \\ 0 & t_{22} \end{pmatrix}_q + \begin{pmatrix} 0 & t_{12} \\ t_{21} & 0 \end{pmatrix}_{неч}, \quad T^{(2)-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & 0 \\ 0 & t_{11} \end{pmatrix}_q - \begin{pmatrix} 0 & t_{12} \\ t_{21} & 0 \end{pmatrix}_{неч}.$$

Структура матрицы коэффициентов B (2.34) совпадает со структурой матрицы (2.46). Вследствие этого можно основываясь на результаты монографии [98] сразу выписать структуру фундаментальных решений системы уравнений:

$$\hat{T}_{q,нч}^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & t_{12} & -t_{42} & -t_{32} \\ t_{21} & t_{11} & -t_{41} & -t_{31} \\ -t_{24} & -t_{14} & t_{44} & t_{34} \\ -t_{14} & -t_{13} & t_{43} & t_{33} \end{pmatrix}_{q,нч} \quad (2.77)$$

$$\hat{T}^{-1} = \hat{T}_{\dot{\div}}^{-1} - i\hat{T}_{i\dot{\div}}^{-1} \quad (2.78)$$

Из общей структуры фундаментальных решений получится структура фундаментальных решений при распространений волн в координатных плоскостях:

$$\begin{aligned} \hat{T}_{\dot{\div}}^{-1} &= \begin{pmatrix} t_{22} & 0 & -t_{42} & 0 \\ 0 & t_{11} & 0 & -t_{31} \\ -t_{24} & 0 & t_{44} & 0 \\ 0 & -t_{13} & 0 & t_{33} \end{pmatrix} \\ \hat{T}_{i\dot{\div}}^{-1} &= \begin{pmatrix} 0 & t_{12} & 0 & -t_{32} \\ t_{21} & 0 & -t_{41} & 0 \\ 0 & -t_{14} & 0 & t_{34} \\ -t_{23} & 0 & t_{43} & 0 \end{pmatrix} \\ \hat{T}^{-1} &= \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & -t_{32} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} \\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.79)$$

В связи с широким применением периодически неоднородные среды являются одним из важных классов неоднородных сред. Структура фундаментальных решений дает возможность определить самые общие уравнения дисперсии электромагнитных волн в периодически неоднородных средах с магнитоэлектрическим эффектом. При распространении электромагнитных волн в координатных плоскостях уравнения дисперсии определяются из условия:

$$\det(\hat{P} - \hat{E} \cos \tilde{k}h) = 0 \quad (2.80)$$

здесь

$$\hat{P} = \frac{1}{2}(\hat{T} + \hat{T}^{-1}) \quad (2.81)$$

Из структур T и T^{-1} структура матрицы P будет иметь вид:

$$\hat{P} = \begin{pmatrix} P_{11} & 0 & P_{13} & P_{14} \\ 0 & P_{11} & P_{14} & P_{24} \\ -P_{24} & P_{14} & P_{33} & 0 \\ P_{14} & -P_{13} & 0 & P_{33} \end{pmatrix} \quad (2.82)$$

учет (2.82) в (2.80) дает:

$$\tilde{P}_1, \tilde{P}_2 = \frac{1}{2} \left(P_{11} + P_{22} \pm \sqrt{(P_{11} - P_{22})^2 + 4(P_{14}P_{14} + P_{13}P_{24})} \right) \quad (2.83)$$

общий вид уравнений дисперсии можно записать в форме:

$$\cos \tilde{k}_1 h = \tilde{P}_1 \quad \cos \tilde{k}_2 h = \tilde{P}_2 \quad (2.84)$$

2.5 Матрицант однородной анизотропной среды

В рамках метода матрицанта, усредненный матрицант, описывающий распространение электромагнитных волн в анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом, имеет аналитическое представление:

$$\hat{T}_{\hat{o}\hat{n}\hat{o}}^{\pm} = \left(\hat{\pi} + \frac{1}{2} \hat{E} \right) \left(\hat{E} \cos kz \pm \frac{\hat{B}}{k} \sin kz \right) - \left(\hat{\pi} - \frac{1}{2} \hat{E} \right) \left(\hat{E} \cos \chi z \pm \frac{\hat{B}}{\chi} \sin \chi z \right) \quad (2.85)$$

матрицант (2.85) является решением уравнения (2.25) при постоянных значениях физико-механических параметров:

$$\vec{U} = \hat{T} \vec{U}_0 \quad (2.86)$$

Решение (2.86) содержит сумму прямых и обратных волн. Учитывая, что:

$$\cos kz = \frac{1}{2} (e^{ikz} + e^{-ikz}); \quad \sin kz = \frac{1}{2i} (e^{ikz} - e^{-ikz})$$

из (2.85) получим матрицанты для волн распространяющихся в направлении $z > 0$ и $z < 0$

$$\begin{aligned}\hat{T}_{\acute{o}\tilde{n}\delta}^+ &= \frac{1}{2} \left(\hat{\pi} + \frac{1}{2} \hat{E} \right) \left(\hat{E} - \frac{\hat{B}_0}{ik} \right) e^{-ikz} - \frac{1}{2} \left(\hat{\pi} - \frac{1}{2} \hat{E} \right) \left(\hat{E} - \frac{\hat{B}_0}{i\chi} \right) e^{-i\chi z} \\ \hat{T}_{\acute{o}\tilde{n}\delta}^- &= \frac{1}{2} \left(\hat{\pi} + \frac{1}{2} \hat{E} \right) \left(E + \frac{\hat{B}_0}{ik} \right) e^{-ikz} - \frac{1}{2} \left(\hat{\pi} - \frac{1}{2} \hat{E} \right) \left(E + \frac{\hat{B}_0}{i\chi} \right) e^{-i\chi z}\end{aligned}\quad (2.87)$$

В (2.85) и (2.87)

$$\hat{\pi} = \frac{\hat{P} - \tilde{P}_2 \hat{E}}{\tilde{P}_1 - \tilde{P}_2} - \frac{1}{2} \hat{E}; \quad \hat{P} = \hat{E} + \frac{1}{2} \hat{B}^2 h^2 \quad (2.88)$$

где \tilde{P}_1, \tilde{P}_2 – корни характеристического уравнения следующего из условия.

$$\det(\hat{P} - \lambda \hat{E}) = 0 \quad (2.89)$$

Матрицанты будут иметь вид

$$\hat{T}_{\acute{o}\tilde{n}\delta}^+ = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{11} & t_{23} & t_{24} \\ -t_{24} & -t_{14} & t_{33} & t_{34} \\ -t_{23} & -t_{13} & t_{43} & t_{33} \end{pmatrix}, \quad (2.90)$$

$$\hat{T}_{\acute{o}\tilde{n}\delta}^- = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & -t_{14} \\ t_{21} & t_{11} & -t_{23} & t_{24} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{33} & t_{34} \\ t_{23} & -t_{13} & t_{43} & t_{33} \end{pmatrix} \quad (2.91)$$

где

$$t_{11} = \frac{\text{Cos}[kz](b_{12}b_{21} - b_{34}b_{43} + \Delta)}{2\Delta},$$

$$\begin{aligned}
t_{12} &= \frac{\text{Sin}[kz](b_{12}^2 b_{21} - 2b_{14}^2 b_{43} + b_{12}(-2b_{14} b_{23} - b_{34} b_{43} + \Delta))}{2k\Delta}, \\
t_{13} &= \frac{\text{Cos}[kz](b_{12} b_{23} + b_{14} b_{43})}{2\Delta}, \\
t_{14} &= \frac{\text{Sin}[kz](b_{12}(b_{14} b_{21} + 2b_{23} b_{34}) + b_{14}(b_{34} b_{43} + \Delta))}{2k\Delta}, \\
t_{21} &= \frac{\text{Sin}[kz](b_{12} b_{21}^2 - 2b_{14} b_{21} b_{23} - b_{34}(2b_{23}^2 + b_{21} b_{43}) + b_{21} \Delta)}{2k\Delta}, \\
t_{23} &= \frac{\text{Sin}[kz](b_{12} b_{21} b_{23} + 2b_{14} b_{21} b_{43} + b_{23}(b_{34} b_{43} + \Delta))}{2k\Delta}, \\
t_{24} &= \frac{\text{Cos}[kz](b_{14} b_{21} + b_{23} b_{34})}{\Delta}, \quad t_{33} = \frac{\text{Cos}[kz](-b_{12} b_{21} + b_{34} b_{43} + \Delta)}{2\Delta}, \\
t_{34} &= \frac{\text{Sin}[kz](-2b_{14}^2 b_{21} - 2b_{14} b_{23} b_{34} + b_{34}(-b_{12} b_{21} + b_{34} b_{43} + \Delta))}{2k\Delta}, \\
t_{43} &= \frac{\text{Sin}[kz](-b_{12}(2b_{23}^2 + b_{21} b_{43}) + b_{43}(-2b_{14} b_{23} + b_{34} b_{43} + \Delta))}{2k\Delta}, \quad (2.40)
\end{aligned}$$

здесь

$$\Delta = \sqrt{(b_{12} b_{21} - b_{34} b_{43})^2 - 4(b_{12} b_{23} + b_{14} b_{43})(b_{14} b_{21} + b_{23} b_{34})}$$

Волновые числа k и χ определяются из разложения уравнений дисперсии электромагнитных волн, с сохранением членов по ω вплоть до ω^2 . В данном случае они имеют вид:

$$1 - \frac{k^2 h^2}{2} = \tilde{P}_1; \quad 1 - \frac{\chi^2 h^2}{2} = \tilde{P}_2 \quad (2.92)$$

Отсюда

$$\begin{aligned}
k &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(-b_{12} b_{21} + 2b_{14} b_{14} - b_{34} b_{43} + \sqrt{(b_{12} b_{21} - b_{34} b_{43})^2 - 4(b_{14} b_{21} + b_{14} b_{34})(b_{12} b_{14} + b_{14} b_{43})} \right)} \\
\chi &= \sqrt{\frac{1}{2} \left(-b_{12} b_{21} + 2b_{14} b_{14} - b_{34} b_{43} - \sqrt{(b_{12} b_{21} - b_{34} b_{43})^2 - 4(b_{14} b_{21} + b_{14} b_{34})(b_{12} b_{14} + b_{14} b_{43})} \right)} \quad (2.93)
\end{aligned}$$

3 Задача отражения и преломления электромагнитных волн на границе двух сред

3.1 Матричная форма граничных условий задач отражения и преломления электромагнитных волн

Рассмотрим условия, накладываемые на волновые поля при взаимодействии волн с границей двух полупространств.

При $z = 0$ матрицанты (2.87) могут быть записаны в виде

$$\hat{T}_0^\pm = \frac{1}{2} \hat{E} \mp \hat{R}, \quad (3.1)$$

матрица \hat{R} имеет вид:

$$\hat{R} = \frac{1}{2i} \begin{pmatrix} k - \chi \\ k\chi \end{pmatrix} \pi \hat{B} - \frac{1}{4i} \begin{pmatrix} k + \chi \\ k\chi \end{pmatrix} \hat{B}. \quad (3.2)$$

Полагая: \vec{U}_P – поле падающих волн, \vec{U}_R – поле отраженных волн и \vec{U}_t – поле преломленных волн, на основе (2.25) имеем:

$$T_0^P \vec{U}_P + T_0^R \vec{U}_R = T_0^t \vec{U}_t, \text{ при } z = 0,$$

или

$$\left(\frac{1}{2} E - R_0 \right) \vec{U}_P + \left(\frac{1}{2} E + R_0 \right) \vec{U}_R = \left(\frac{1}{2} E - R_t \right) \vec{U}_t \quad (3.3)$$

Учитывая непрерывность полей на контакте сред:

$$\vec{U}_P + \vec{U}_R = \vec{U}_t, \quad (3.4)$$

получим:

$$\hat{R}_0 \vec{U}_P - \hat{R}_0 \vec{U}_R = \hat{R}_t \vec{U}_t \quad (3.5)$$

С учетом (3.4) выражение (3.5) есть искомое граничное условие для векторов $\vec{U}_P, \vec{U}_R, \vec{U}_t$ в матричной форме

В (3.4) и (3.5) неизвестны вектора \vec{U}_R и \vec{U}_t . Подстановка (3.4) в (3.5) дает уравнение

$$(\hat{R}_0 + \hat{R}_t)\vec{U}_R = (\hat{R}_0 - \hat{R}_t)\vec{U}_P \quad (3.6)$$

откуда следует представление для отраженных волн:

$$\vec{U}_R = (\vec{R}_0 + \hat{R}_t)^{-1}(\hat{R}_0 - \hat{R}_t)\vec{U}_0 \quad (3.7)$$

Поле преломленных волн \vec{U}_t определяется формулой (3.4).

Матрица \hat{R} в (3.1) может быть представлена в форме:

$$\hat{R} = \frac{1}{2ik\chi(k + \chi)} [\hat{B}_0^2 h^2 - (p_{11} + p_{22} - \Delta_0)\hat{E}] \hat{B}, \quad (3.8)$$

где

$$p_{11} = b_{12}b_{21} - b_{14}b_{23}; \quad p_{22} = b_{34}b_{43} - b_{14}b_{23}$$

$$\Delta_0 = \sqrt{(b_{12}b_{34} + b_{14}^2)(b_{21}b_{43} + b_{23}^2)} \quad (3.9)$$

Условия (3.3) или (3.5) с условием непрерывности решений на границе раздела сред (3.4), есть матричная форма граничных условий, накладываемые на векторы полей отраженных, преломленных и падающих волн.

3.2 Коэффициенты отражения и преломления электромагнитных волн на границе изотропного диэлектрика и анизотропного диэлектрика с магнитоэлектрическим эффектом

При двумерном распространении электромагнитных волн в анизотропных диэлектрических средах тетрагональной, тригональной и гексагональной сингонии с магнитоэлектрическим эффектом матрица, \hat{B} имеет вид (2.35) с коэффициентами (2.36) ($k_y = 0$)

Вычисления на основе (3.8), с учетом выражении (2.9), позволяют получить явный вид матрицы \hat{R} :

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 & r_{14} \\ r_{21} & 0 & r_{23} & 0 \\ 0 & -r_{14} & 0 & r_{34} \\ -r_{23} & 0 & r_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.10)$$

Элементы матрицы \hat{R} получены в виде:

$$\begin{aligned}
 r_{12} &= \frac{1}{2ik\chi(k+\chi)} \Delta_1 (b_{12}\Delta_2 - b_{43}\Delta_1), & r_{14} &= \frac{1}{2ik\chi(k+\chi)} \Delta_1 (b_{14}\Delta_2 + b_{23}\Delta_1), \\
 r_{21} &= \frac{1}{2ik\chi(k+\chi)} \Delta_2 (-b_{34}\Delta_2 + b_{21}\Delta_1), \\
 r_{23} &= \frac{1}{2ik\chi(k+\chi)} \Delta_2 (b_{14}\Delta_2 + b_{23}\Delta_1), \\
 r_{34} &= \frac{1}{2ik\chi(k+\chi)} \Delta_1 (b_{34}\Delta_2 - b_{21}\Delta_1), \\
 r_{43} &= -\frac{1}{2ik\chi(k+\chi)} \Delta_2 (b_{43}\Delta_2 + b_{12}\Delta_1),
 \end{aligned} \tag{3.11}$$

где

$$\Delta_1 = \sqrt{b_{12}b_{34} + b_{14}^2}, \quad \Delta_2 = \sqrt{b_{21}b_{43} + b_{23}^2}, \tag{3.12}$$

Пусть

$$\hat{R}_0 + \hat{R}_t = \hat{\tau}^+, \quad \hat{R}_0 - \hat{R}_t = \hat{\tau}^-, \tag{3.13}$$

Тогда

$$\vec{U}_R = (\hat{\tau}^+)^{-1} (\hat{\tau}^-) \vec{U}_P. \tag{3.14}$$

Элементы матриц $\hat{\tau}^+$ и $\hat{\tau}^-$ определяются как

$$\tau_{ij}^+ = r_{ij}^0 + r_{ij}^t, \quad \tau_{ij}^- = r_{ij}^0 - r_{ij}^t. \tag{3.15}$$

Поле отраженных волн

$$\vec{U}_R = \hat{G} \vec{U}_P. \tag{3.16}$$

Из (3.4)

$$\vec{U}_R = \vec{U}_t - \vec{U}_P. \quad (3.17)$$

Подставляя (3.17) в (3.16) получим поле преломленных волн:

$$\vec{U}_t = (\hat{G} + \hat{E})\vec{U}_P \quad (3.18)$$

где

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & g_{42} & 0 & g_{44} \end{pmatrix} \quad (3.19)$$

элементы матрицы \hat{G} получены в виде

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{\tau_{43}^+ \tau_{21}^-}{\Lambda_2^2} + \frac{\tau_{23}^+ \tau_{23}^-}{\Lambda_2^2}, & g_{13} &= \frac{\tau_{43}^+ \tau_{23}^-}{\Lambda_2^2} - \frac{\tau_{23}^+ \tau_{43}^-}{\Lambda_2^2}, \\ g_{22} &= \frac{\tau_{34}^+ \tau_{12}^-}{\Lambda_1^2} + \frac{\tau_{14}^+ \tau_{14}^-}{\Lambda_1^2}, & g_{24} &= \frac{\tau_{34}^+ \tau_{14}^-}{\Lambda_1^2} - \frac{\tau_{14}^+ \tau_{34}^-}{\Lambda_1^2}, \\ g_{31} &= \frac{\tau_{23}^+ \tau_{21}^-}{\Lambda_2^2} - \frac{\tau_{21}^+ \tau_{23}^-}{\Lambda_2^2}, & g_{33} &= \frac{\tau_{23}^+ \tau_{23}^-}{\Lambda_2^2} + \frac{\tau_{21}^+ \tau_{43}^-}{\Lambda_2^2}, \\ g_{42} &= \frac{\tau_{14}^+ \tau_{12}^-}{\Lambda_1^2} - \frac{\tau_{12}^+ \tau_{14}^-}{\Lambda_1^2}, & g_{44} &= \frac{\tau_{14}^+ \tau_{14}^-}{\Lambda_1^2} - \frac{\tau_{12}^+ \tau_{34}^-}{\Lambda_1^2}, \end{aligned} \quad (3.20)$$

здесь

$$\Lambda_1 = \sqrt{\tau_{12}^+ \tau_{34}^+ + \tau_{14}^{+2}}, \quad \Lambda_2 = \sqrt{\tau_{21}^+ \tau_{43}^+ + \tau_{23}^{+2}}. \quad (3.21)$$

Поскольку

$$\vec{U}_R = (E_{yR}, H_{xR}, H_{yR}, E_{xR})^T,$$

$$\vec{U}_t = (E_{yt}, H_{xt}, H_{yt}, E_{xt})^t, \quad (3.22)$$

полагая

$$\vec{U}_P = (E_{yP}, \beta E_{yP}, 0, 0)^t, \quad (3.23)$$

получим поле отраженных волн

$$\begin{aligned} E_{yR} &= g_{11} E_{yP}, \quad H_{xR} = \beta g_{22} E_{yP}, \\ H_{yR} &= g_{31} E_{yP}, \quad E_{xR} = \beta g_{42} E_{yP}, \end{aligned} \quad (3.24)$$

и поле преломленных волн

$$\begin{aligned} E_{yt} &= (g_{11} + 1) E_{yP}, \quad H_{xt} = (g_{22} + 1) \beta E_{yP}, \\ H_{yt} &= (g_{31} + 1) E_{yP}, \quad E_{xt} = (g_{42} + 1) \beta E_{yP}, \end{aligned} \quad (3.25)$$

Предельный случай

При $\mu_1 = \mu_2 = 1$, $\alpha = 0$ диэлектрик является изотропным. Для такой изотропной среды матрица \hat{B} будет иметь вид:

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b_{34} \\ 0 & 0 & b_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.25)$$

где

$$\begin{aligned} b_{12} &= i\omega\mu_0, & b_{21} &= i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1, \\ b_{34} &= -i\omega\varepsilon_0\varepsilon_1, & b_{43} &= -i\omega\mu_0. \end{aligned} \quad (3.26)$$

Тогда матрицу R можно записать в следующем виде:

$$\hat{R} = \begin{pmatrix} 0 & r_{12} & 0 & 0 \\ r_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r_{34} \\ 0 & 0 & r_{43} & 0 \end{pmatrix} \quad (3.27)$$

здесь

$$r_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}}, \quad r_{21} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}},$$

$$r_{34} = -\frac{1}{2i} \sqrt{\frac{\varepsilon_0 \varepsilon_1}{\mu_0}}, \quad r_{43} = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0 \varepsilon_1}},$$

Учитывая (3.23) – (3.27) получим G матрицу:

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & g_{44} \end{pmatrix} \quad (3.28)$$

где

$$g_{11} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}, \quad g_{22} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}},$$

$$g_{33} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}, \quad g_{44} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}}. \quad (3.29)$$

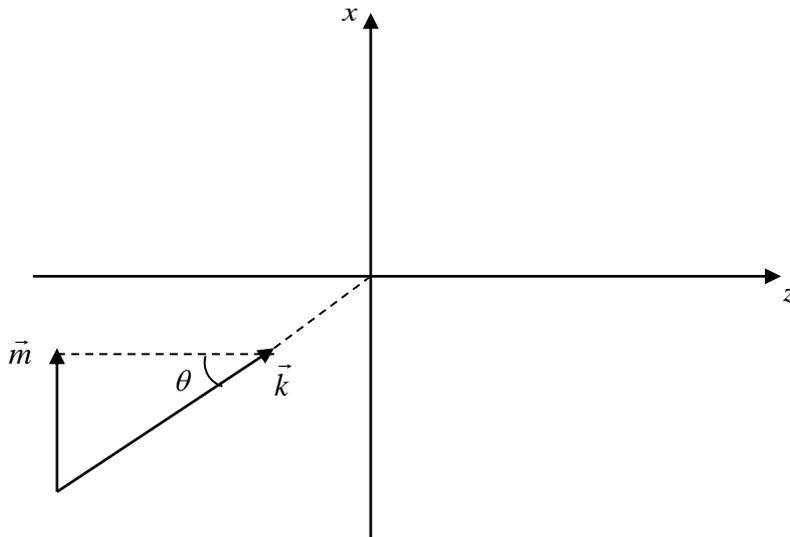
Подставляя коэффициенты в (3.24) и (3.25) получим классические уравнения Френеля при отражении и преломлении электромагнитных волн, падающих на границу двух изотропных диэлектриков:

$$E_{yR} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_2}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} E_{yP}, \quad (3.30)$$

$$E_{yT} = \frac{2\sqrt{\varepsilon_1}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_2}} E_{yP}. \quad (3.31)$$

3.3 Энергетические коэффициенты отражения и преломления

В этом параграфе рассмотрим аналитические формулы потоков энергии при отражении и преломлении электромагнитных волн на границе раздела изотропного полупространства и анизотропной среды магнитоэлектрическим эффектом.



$$m^2 = \omega^2 \varepsilon \varepsilon_0 \mu \mu_0 \sin^2 \theta$$

Пусть границей раздела сред является плоскость $z=0$. Анизотропную среду ориентируем таким образом, чтобы оси декартовой системы координат совпали с соответствующими кристаллографическими осями.

Отражение и преломление волн в случае падения на границу двух сред электромагнитной ТЕ волны.

Пусть на границу раздела из изотропной среды падает электромагнитная ТЕ волна, то есть вектор напряженности магнитного поля лежит в плоскости падения.

Матрицы коэффициентов изотропной среды и анизотропной среды с магнитоэлектрическим эффектом запишем как:

$$\hat{B}_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.32)$$

$$\hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & 0 & b_{14} \\ b_{21} & 0 & b_{23} & 0 \\ 0 & -b_{14} & 0 & b_{34} \\ -b_{23} & 0 & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.33)$$

z -ВЫЕ КОМПОНЕНТЫ ВОЛНОВЫХ ВЕКТОРОВ БУДУТ ИМЕТЬ ВИД:

$$k_1 = \sqrt{-a_{12}a_{21}}, \quad (3.34)$$

$$\chi_1 = \sqrt{-a_{34}a_{43}}, \quad (3.35)$$

$$\Delta_1 = -b_{12}b_{21} - b_{34}b_{43} + 2b_{14}b_{23}, \quad (3.36)$$

$$\Delta_2 = (b_{12}b_{21} - b_{34}b_{43})^2 - 4(b_{14}b_{21} + b_{23}b_{34})(b_{12}b_{23} + b_{14}b_{43}), \quad (3.37)$$

$$\left. \begin{matrix} k_2^2 \\ \chi_2^2 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2}(\Delta_1 \mp \sqrt{\Delta_2}), \quad (3.38)$$

$$\text{Если } \left(\Delta_2 < 0 \ \& \ \text{Im} \left[\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2})} \right] < 0 \right) \Rightarrow k_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2})}.$$

$$\text{Если } \left(\Delta_2 < 0 \ \& \ \text{Im} \left[\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2})} \right] > 0 \right) \Rightarrow k_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2})}.$$

$$\text{Если } \left(\frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2}) \right) < 0 \Rightarrow k_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2})}.$$

$$\text{Если } \left(\frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2}) \right) \geq 0 \Rightarrow k_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2})}.$$

$$\text{Если } \left(\Delta_2 < 0 \ \& \ \text{Im} \left[\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2})} \right] < 0 \right) \Rightarrow \chi_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\Delta_1 + \sqrt{\Delta_2})}.$$

$$\text{Если } \left(\Delta_2 < 0 \ \& \ \text{Im} \left[\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2})} \right] > 0 \right) \Rightarrow \chi_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta_1 + \sqrt{\Delta_2})}.$$

$$\text{Если } \left(\frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2}) \right) < 0 \Rightarrow \chi_2 = -\sqrt{\frac{1}{2}(\Delta_1 + \sqrt{\Delta_2})}.$$

$$\text{Если } \left(\frac{1}{2}(\Delta_1 - \sqrt{\Delta_2}) \right) \geq 0 \Rightarrow \chi_2 = \sqrt{\frac{1}{2}(\Delta_1 + \sqrt{\Delta_2})}.$$

$$\text{Вектор столбец имеет вид: } (E_y H_x H_y E_x)^t \Rightarrow \vec{U}_P = (E_0 H_0 00)^t$$

Матрицант изотропной среды можно записать в виде:

$$\hat{T}_1^\pm = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & \pm \frac{ia_{12}}{k_1} & 0 & 0 \\ \pm \frac{ia_{21}}{k_1} & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} e^{\mp ik_1 z} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \pm \frac{ia_{34}}{\chi_1} \\ 0 & 0 & \pm \frac{ia_{43}}{\chi_1} & 1 \end{pmatrix} e^{i\chi_1 z} \quad (3.39)$$

Из условия $\hat{T}_1^+(0)\vec{U}_0 = \vec{U}_0$:

$$H_0 = -\frac{ik_1}{a_{12}} E_0, \quad (3.40)$$

$$H_0 = \frac{ia_{21}}{k_1} E_0. \quad (3.41)$$

Матрицант второй среды запишем как:

$$\hat{T}_2^+ = \frac{1}{2} \frac{1}{\chi_2^2 - k_2^2} \left[\hat{F} e^{-ik_2 z} - \hat{V} e^{-i\chi_2 z} \right] \quad (3.42)$$

Здесь

$$\hat{F} = (\hat{B}_2^2 + \chi_2^2 \hat{E}) + \frac{i}{k_2} (\hat{B}_2^3 + \chi_2^2 \hat{B}_2), \quad (3.43)$$

$$\hat{V} = (\hat{B}_2^2 + k_2^2 \hat{E}) + \frac{i}{\chi_2} (\hat{B}_2^3 + k_2^2 \hat{B}_2), \quad (3.44)$$

Тогда

$$\hat{T}_2^+(0) = \frac{1}{2} \left[\hat{E} \pm \frac{i}{k_2 \chi_2 (k_2 + \chi_2)} \hat{R}_2 \right]. \quad (3.45)$$

Согласно (3.7) \hat{G} определим как

$$\hat{G} = (\hat{R}_3 + \hat{R}_4)^{-1} (\hat{R}_3 - \hat{R}_4), \quad (3.46)$$

здесь

$$\hat{R}_3 = \hat{T}_1^+(0) - \frac{1}{2} \hat{E}, \quad (3.47)$$

$$\hat{R}_4 = \frac{i}{k_2 \chi_2 (k_2 + \chi_2)} \hat{R}_2 \quad (3.48)$$

Для данных \hat{B}_1 и \hat{B}_2 :

$$\hat{G} = \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & g_{13} & 0 \\ 0 & g_{22} & 0 & g_{24} \\ g_{31} & 0 & g_{33} & 0 \\ 0 & g_{42} & 0 & g_{44} \end{pmatrix} \quad (3.49)$$

Зная \vec{U}_0 и \hat{G} найдем \vec{U}_R и \vec{U}_t :

$$\vec{U}_R = \hat{G}\vec{U}_0 = \begin{pmatrix} g_{11} \\ \frac{ia_{21}}{k_1} g_{22} \\ g_{31} \\ \frac{ia_{21}}{k_1} g_{42} \end{pmatrix}, \quad (3.50)$$

$$\vec{U}_t = (\hat{E} + \hat{G})\vec{U}_0 = \begin{pmatrix} 1 + g_{11} \\ \frac{ia_{21}}{k_1} (1 + g_{22}) \\ g_{31} \\ \frac{ia_{21}}{k_1} g_{42} \end{pmatrix}. \quad (3.51)$$

Таким образом, матрицанты среды и матрица G позволяют записать в явном виде поля падающей, отраженной и преломленной электромагнитных волн:

$$\begin{cases} E_y^{nad} = e^{-ik_1 z} \\ H_x^{nad} = \frac{ia_{21}}{k_1} e^{-ik_1 z} \end{cases} \quad (3.52)$$

$$\begin{cases} E_y^{omp} = \frac{1}{2} (g_{11} - g_{22}) e^{ik_1 z} \\ H_x^{omp} = -\frac{ia_{21}}{k_1} \frac{1}{2} (g_{11} - g_{22}) e^{ik_1 z} \\ H_y^{omp} = \frac{1}{2} \left(g_{31} + \frac{a_{21}a_{34}}{k_1 \chi_1} g_{42} \right) e^{i\chi_1 z} \\ E_x^{omp} = \frac{1}{2} \left(\frac{ia_{21}}{k_1} g_{42} - \frac{ia_{43}}{\chi_1} g_{31} \right) e^{i\chi_1 z} \end{cases} \quad (3.53)$$

$$\begin{pmatrix} E_y^{np} \\ H_x^{np} \\ H_y^{np} \\ E_x^{np} \end{pmatrix} = T_2^+ \vec{W}_T \quad (3.54)$$

Поток электромагнитной энергии вычисляется по формуле Умова-Пойтинга

$$S = [EH] \quad (3.55)$$

z -вая компонента плотности потока электромагнитной энергии:

$$S_z = H_y E_x - E_y H_x \quad (3.56)$$

Таким образом, энергетический коэффициент отражения имеет вид:

$$\frac{\bar{S}_z^{omp}}{\bar{S}_z^{nad}} = \frac{\operatorname{Re} \left[\left(g_{31} + \frac{a_{21} a_{34}}{k_1 \chi_1} \right) \left(\frac{ia_{21}}{k_1} g_{42} - \frac{ia_{43}}{\chi_1} g_{31} \right)^* + \frac{ia_{21}}{k_1} \frac{1}{2} (g_{11} - g_{22})(g_{11} - g_{22})^* \right]}{4 \operatorname{Re} \left[\frac{ia_{21}}{k_1} \right]} \quad (3.57)$$

Записав поле преломленных волн как:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = \hat{T}_2^+(0) \vec{U}_t \quad (3.58)$$

Получим энергетический коэффициент преломления:

$$\frac{\bar{S}_z^{np}}{\bar{S}_z^{nad}} = \frac{\operatorname{Re} [\gamma_3 \gamma_4^* - \gamma_1 \gamma_2^*]}{\operatorname{Re} \left[\frac{ia_{21}}{k_1} \right]} \quad (3.59)$$

Отражение и преломление волн при падении на границу двух сред электромагнитной ТМ волны.

Аналогично получим энергетические коэффициенты отражения и преломления, если на границу раздела из изотропной среды падает электромагнитная ТМ волна.

В этом случае вектор столбец имеет вид:

$$(E_y H_x H_y E_x)^t \Rightarrow \vec{W}_0 = (00H_0E_0)^t \quad (3.60)$$

Из условия $\hat{T}_1^+(0)\vec{W}_0 = \vec{W}_0$

$$H_0 = \frac{ia_{34}}{\chi_1} E_0, \quad (3.61)$$

$$H_0 = -\frac{ia_{43}}{\chi_1} E_0. \quad (3.62)$$

Зная \vec{U}_0 и \hat{G} найдем \vec{U}_R и \vec{U}_t :

$$\vec{U}_R = \hat{G}\vec{U}_P = \begin{pmatrix} \frac{ia_{34}}{\chi_1} g_{13} \\ g_{24} \\ \frac{ia_{34}}{\chi_1} g_{33} \\ g_{44} \end{pmatrix}, \quad (3.63)$$

$$\vec{U}_t = (\hat{E} + \hat{G})\vec{U}_P = \begin{pmatrix} \frac{ia_{34}}{\chi_1} g_{13} \\ g_{24} \\ \frac{ia_{34}}{\chi_1} (1 + g_{33}) \\ 1 + g_{44} \end{pmatrix}. \quad (3.64)$$

Таким образом, явный вид полей падающей, отраженной и преломленной электромагнитных волн:

$$\begin{cases} H_y^{na\partial} = \frac{ia_{34}}{\chi_1} e^{-i\chi_1 z} \\ E_x^{na\partial} = e^{-i\chi_1 z} \end{cases} \quad (3.65)$$

$$\begin{cases} E_y^{omp} = \frac{1}{2} \left(\frac{ia_{34}}{\chi_1} g_{13} - \frac{ia_{12}}{k_1} g_{24} \right) e^{ik_1 z} \\ H_x^{omp} = \frac{1}{2} \left(\frac{a_{21}a_{34}}{k_1 \chi_1} g_{13} + g_{24} \right) e^{ik_1 z} \\ H_y^{omp} = \frac{1}{2} \frac{ia_{34}}{\chi_1} (g_{33} - g_{44}) e^{i\chi_1 z} \\ E_x^{omp} = \frac{1}{2} (g_{44} - g_{33}) e^{i\chi_1 z} \end{cases} \quad (3.66)$$

$$\vec{W}^{np} = T_2^+ \vec{W}_T \quad (3.67)$$

Тогда энергетический коэффициент отражения определяется как

$$\frac{\bar{S}_z^{omp}}{\bar{S}_z^{nad}} = \frac{\operatorname{Re} \left[\frac{ia_{34}}{\chi_1} (g_{33} - g_{44}) (g_{44} - g_{33})^* - \left(\frac{ia_{34}}{\chi_1} g_{13} - \frac{ia_{12}}{k_1} g_{24} \right) \left(\frac{a_{21}a_{34}}{k_1 \chi_1} g_{13} + g_{24} \right)^* \right]}{4 \operatorname{Re} \left[\frac{ia_{34}}{\chi_1} \right]} \quad (3.68)$$

Записав поле преломленных волн как:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \\ \gamma_4 \end{pmatrix} = \hat{T}_2^+(0) \vec{W}_T \quad (2.69)$$

Получим энергетический коэффициент преломления:

$$\frac{\bar{S}_z^{np}}{\bar{S}_z^{nad}} = \frac{\operatorname{Re} [\gamma_3 \gamma_4^* - \gamma_1 \gamma_2^*]}{\operatorname{Re} \left[\frac{ia_{34}}{\chi_1} \right]} \quad (3.70)$$

4 Численные расчеты плотности потоков энергии

4.1 Расчет плотности потоков энергии в случае падения на границу двух сред ТЕ волны

С помощью формул (3.57) и (3.59) энергетических коэффициентов отражения и преломления в случае падения на границу двух сред ТЕ волны построены графики зависимости энергетических коэффициентов отражения от угла падения.

Первая среда изотропная. Вторая - анизотропная среда без магнитоэлектрического эффекта.

Частота падающей электромагнитной волны:

$$\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$$

Параметры первой среды:

$$\varepsilon = 5 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\mu = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Параметры второй среды:

$$\alpha_1 = 0; \alpha_2 = 0;$$

$$\varepsilon_1 = 1 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м}; \quad \varepsilon_2 = 1,5 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\mu_1 = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}; \quad \mu_2 = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Здесь ε , ε_1 , ε_2 – диэлектрические параметры первой и второй сред;

μ , μ_1 , μ_2 – магнитные параметры сред;

α_1 , α_2 – магнитоэлектрические параметры второй среды.

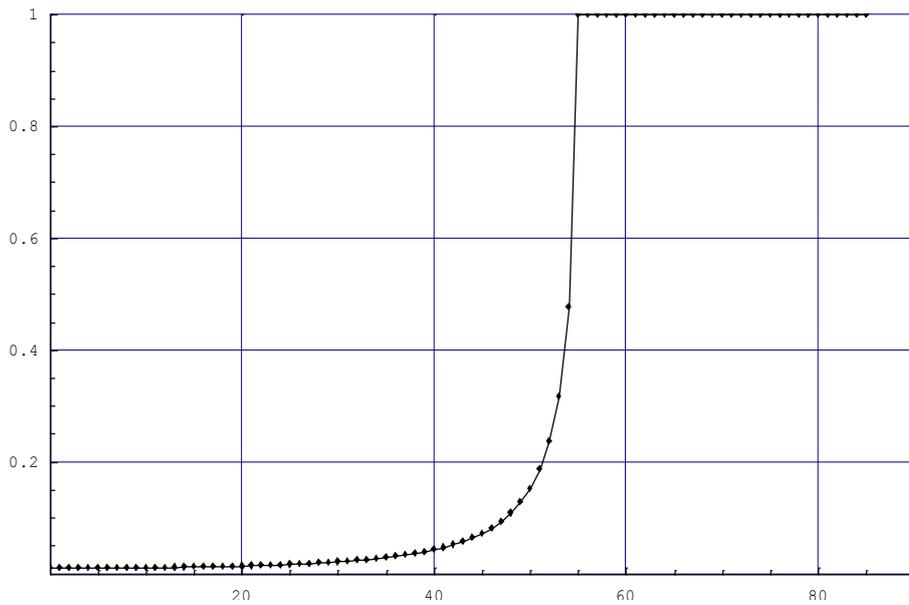


Рисунок 4.1 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения

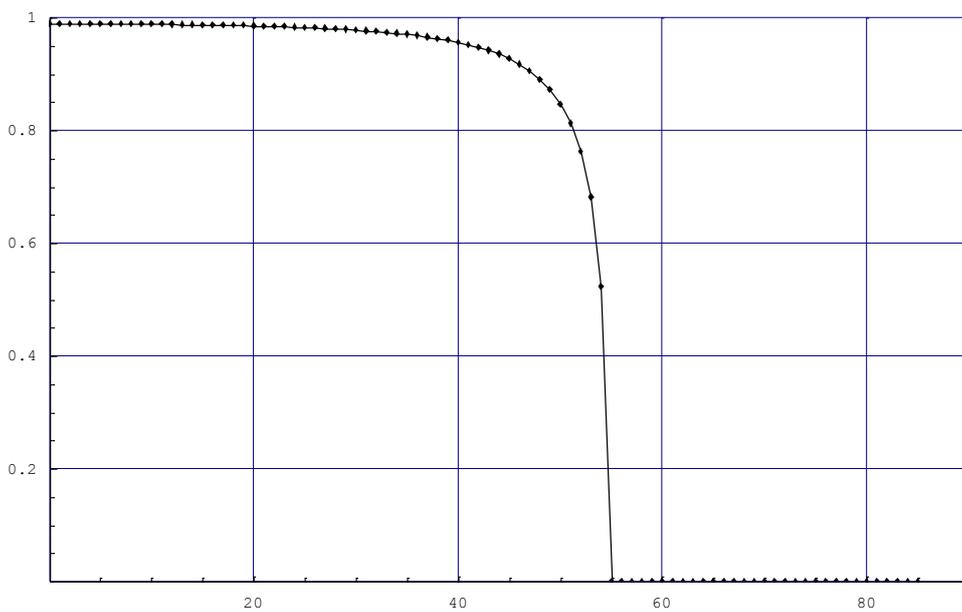


Рисунок 4.2 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения

Из графиков (4.1) и (4.2) видно, что при углах больших, чем угол полного внутреннего отражения, волна отражается полностью.

Первая среда изотропная. Во второй среде рассматриваются различные значения продольной составляющей магнитоэлектрического коэффициента.

Частота падающей электромагнитной волны

$$\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$$

Параметры первой среды:

$$\varepsilon = 1,5 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\mu = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Параметры второй среды:

$$\alpha_1 = 0;$$

$$\varepsilon_1 = 1 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\varepsilon_2 = 5 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\mu_1 = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м};$$

$$\mu_2 = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

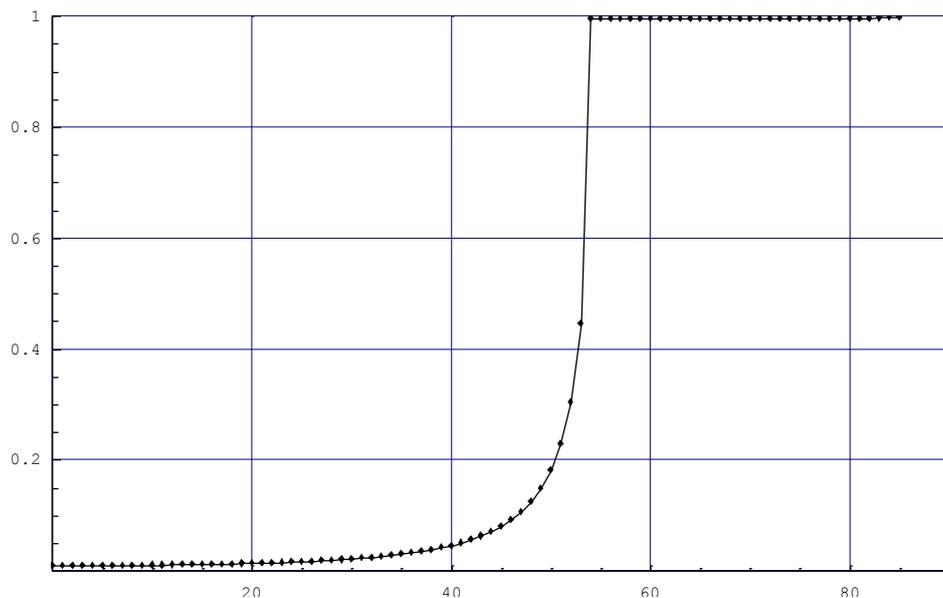


Рисунок 4.3 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 10^{-9}$)

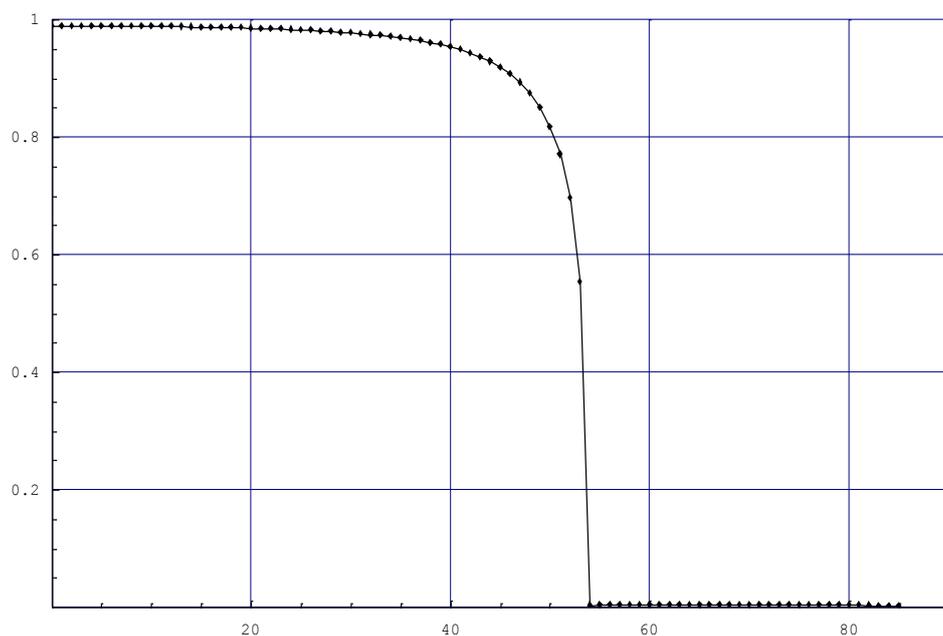


Рисунок 4.4 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 10^{-9}$)

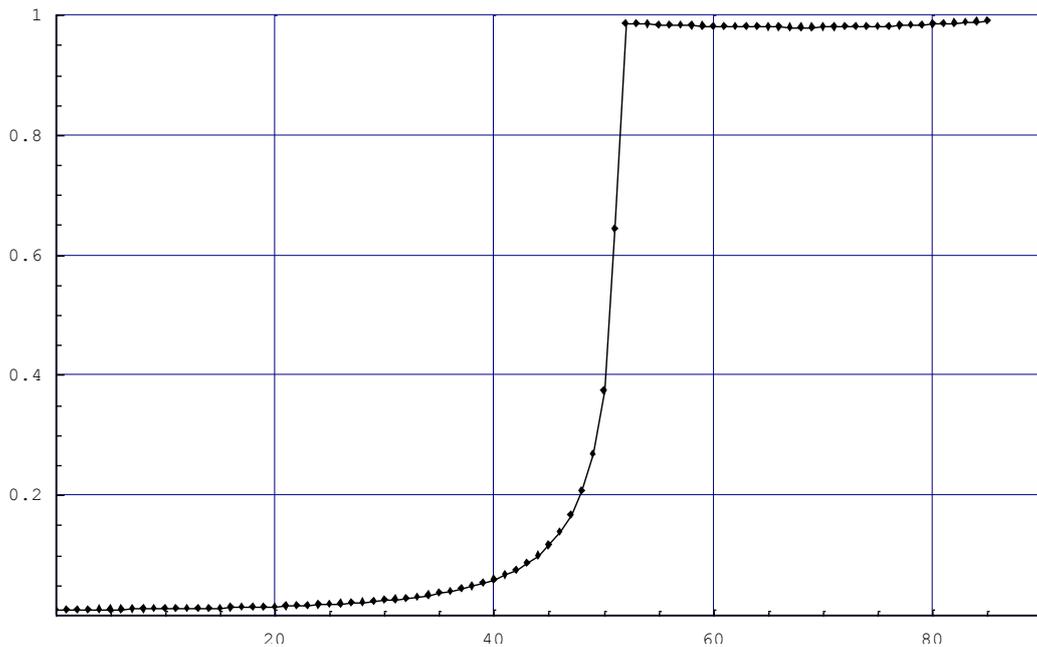


Рисунок 4.5 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 2 * 10^{-9}$)

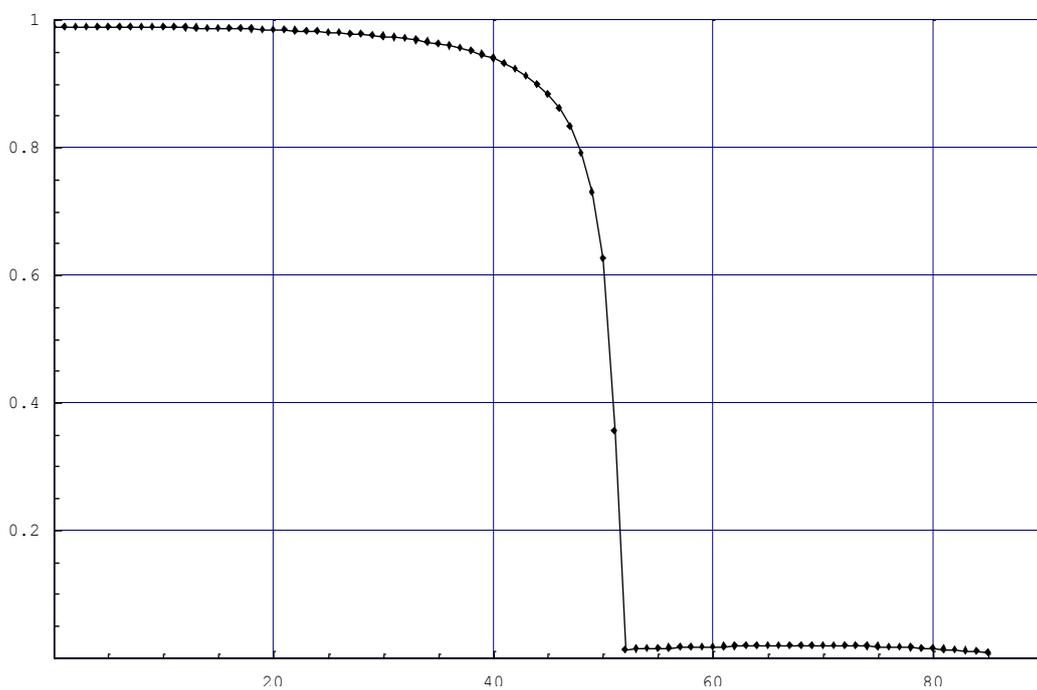


Рисунок 4.6 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 2 * 10^{-9}$)

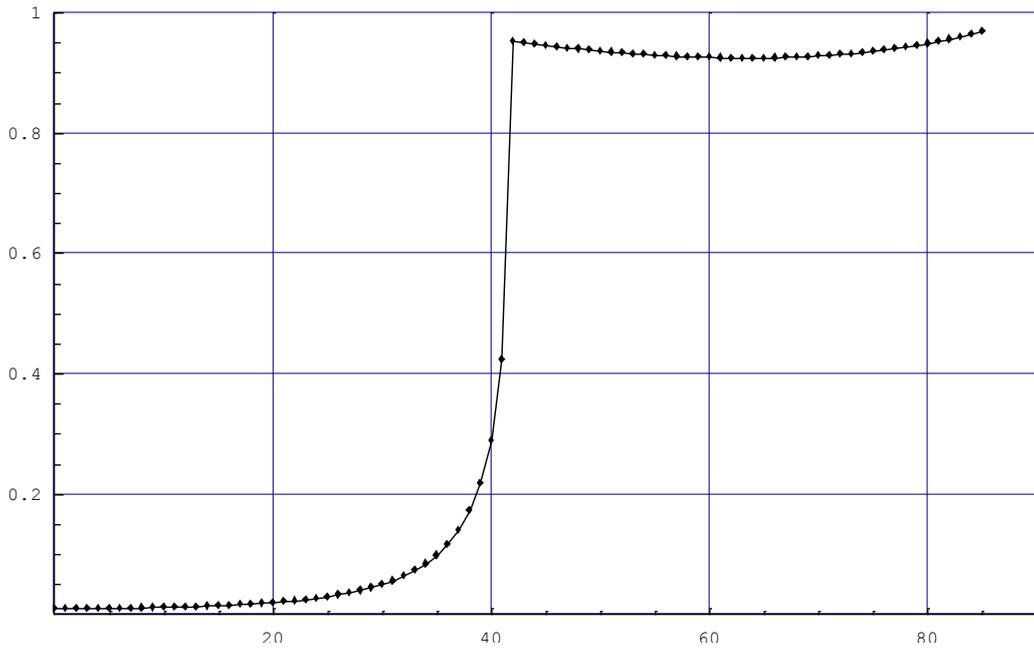


Рисунок 4.7 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 4 * 10^{-9}$)

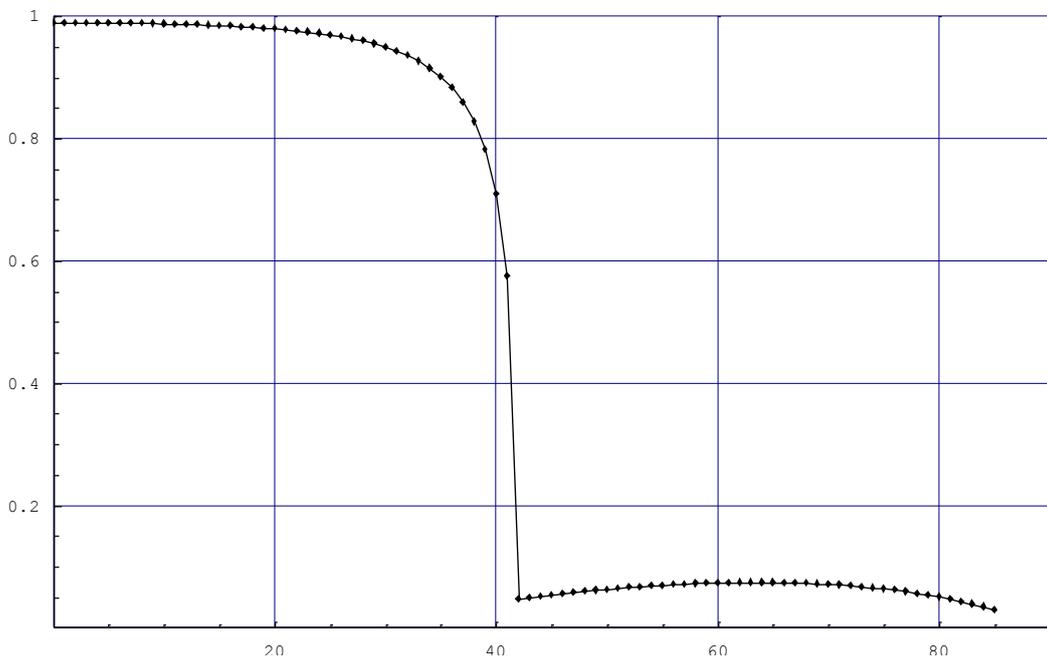


Рисунок 4.8 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 4 * 10^{-9}$)

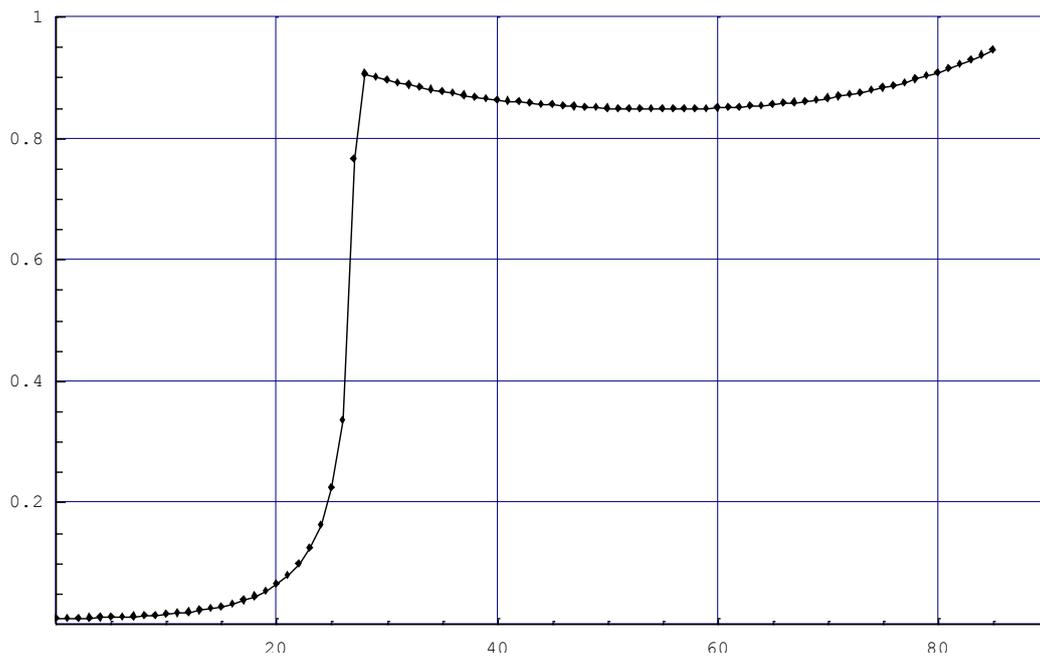


Рисунок 4.9 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 6 \cdot 10^{-9}$)

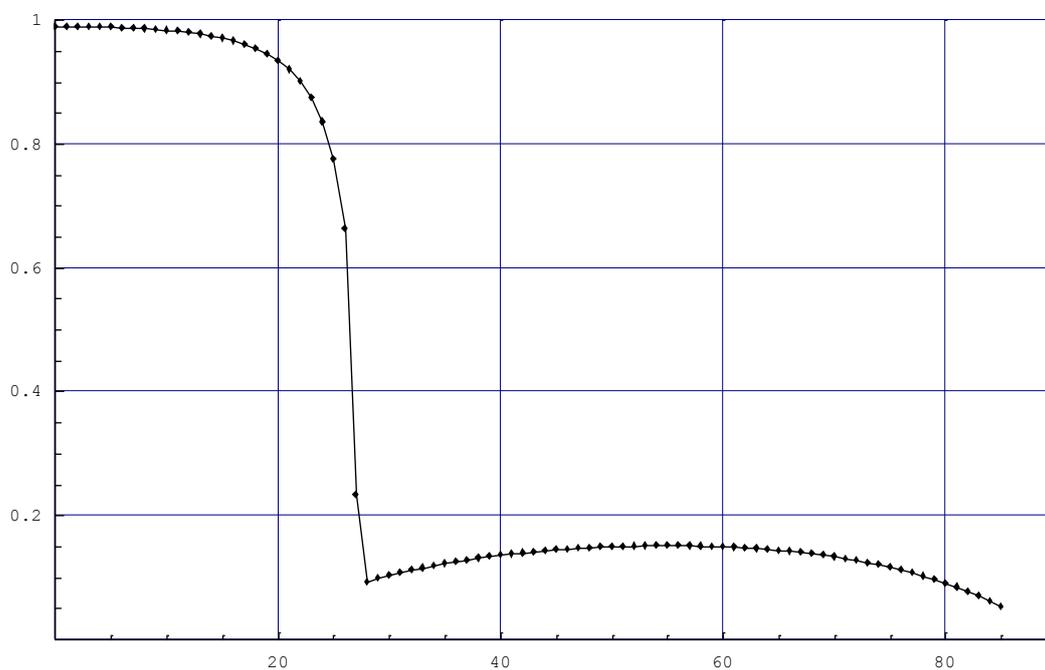


Рисунок 4.10 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 6 \cdot 10^{-9}$)

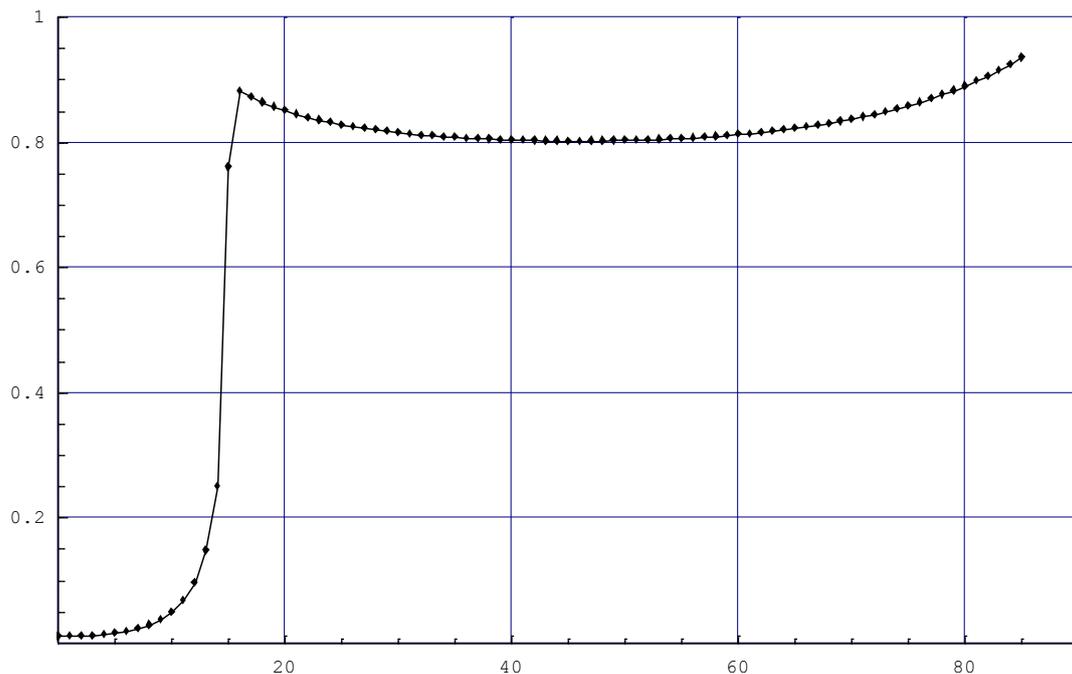


Рисунок 4.11 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 7 * 10^{-9}$)

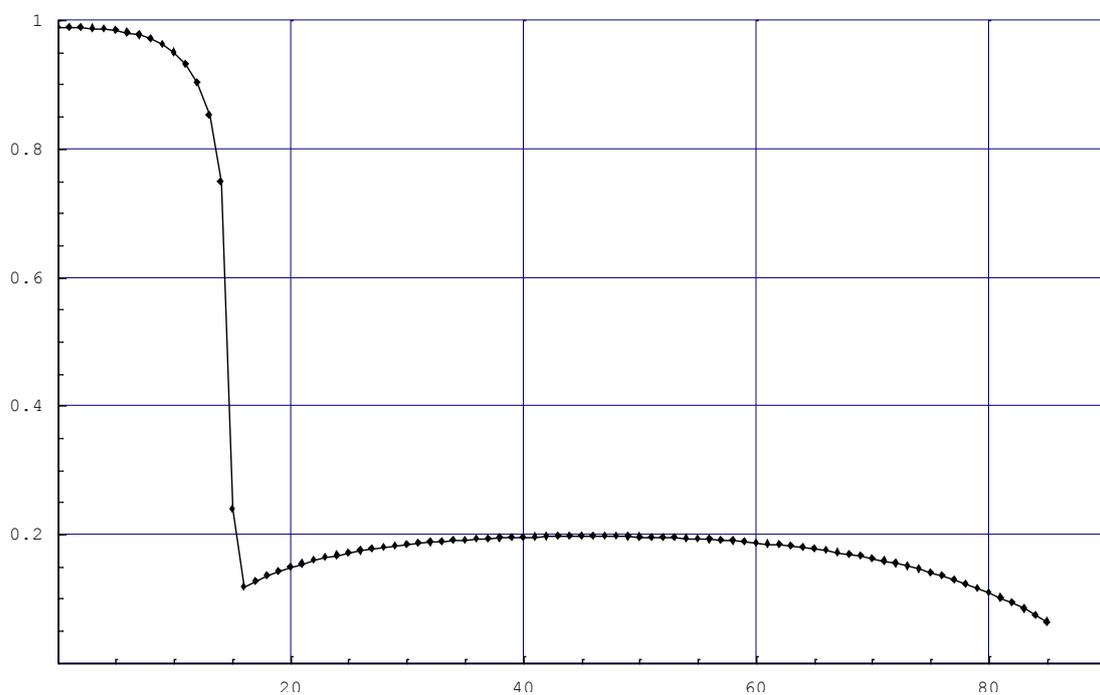


Рисунок 4.12 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 7 * 10^{-9}$)

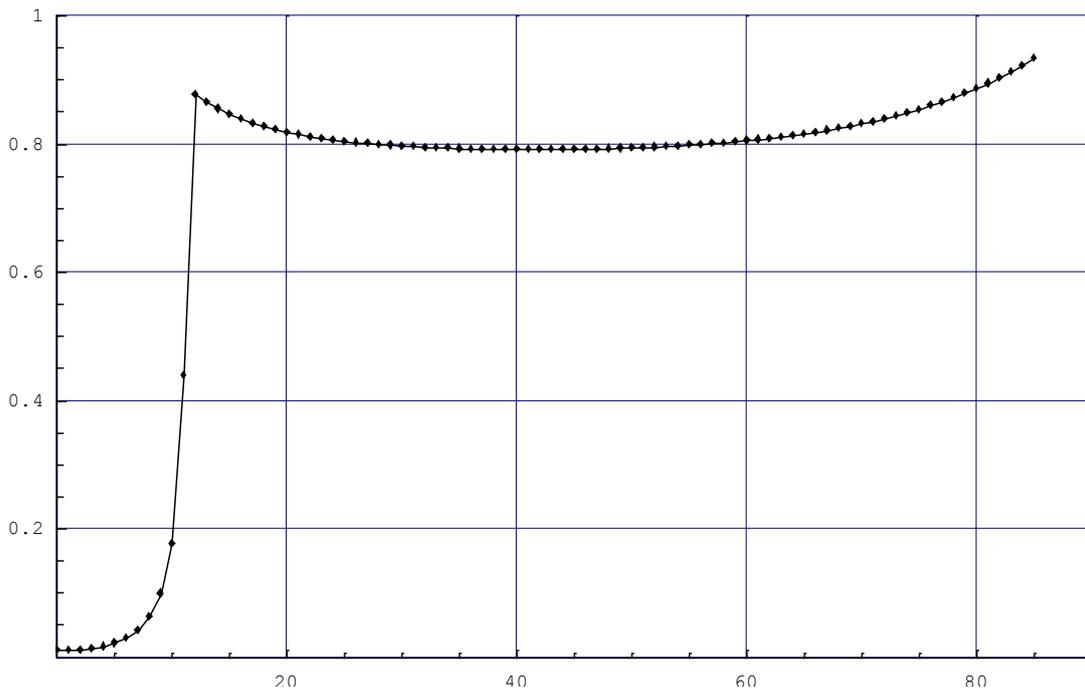


Рисунок 4.13 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 7,2 * 10^{-9}$)

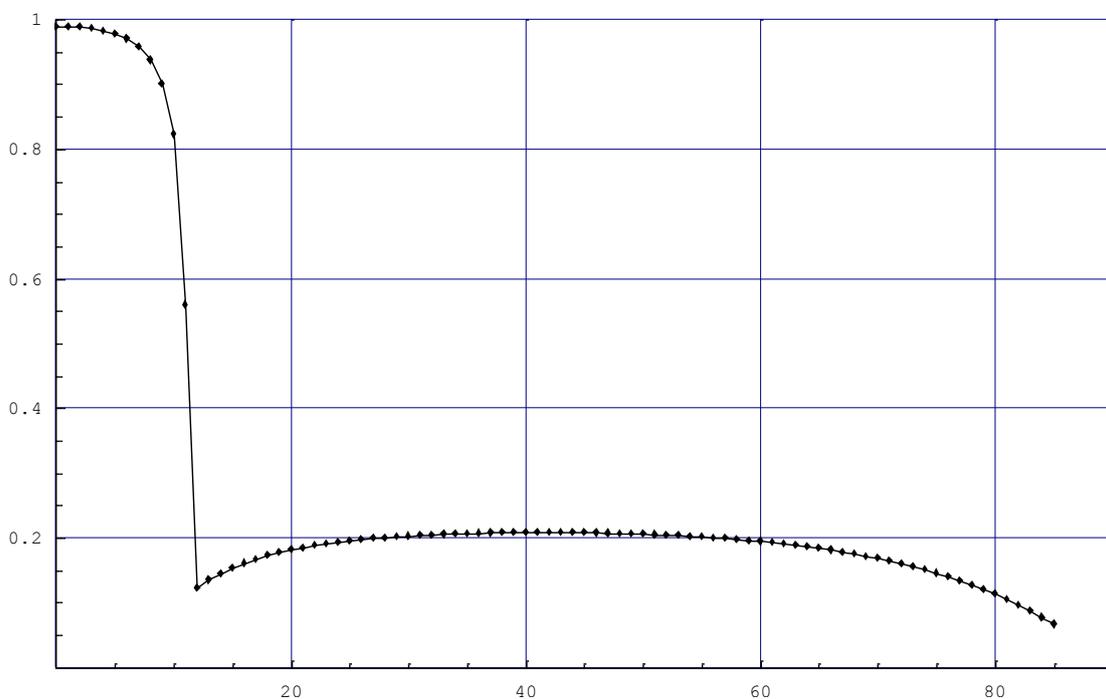


Рисунок 4.14 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 7,2 * 10^{-9}$)

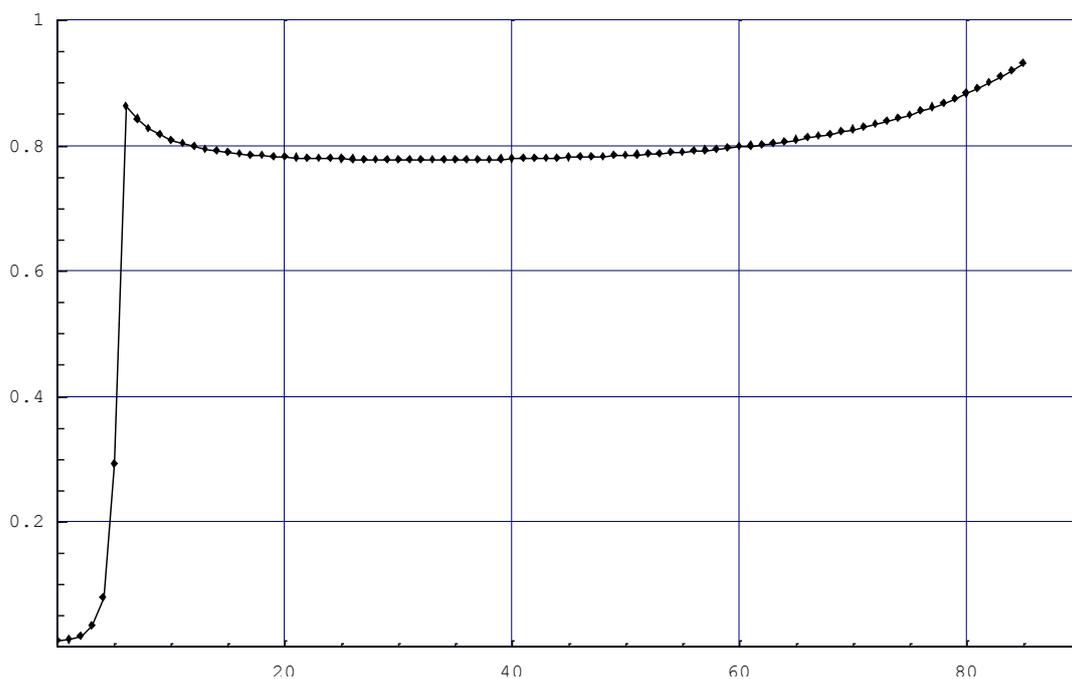


Рисунок 4.15 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 7,4 * 10^{-9}$)

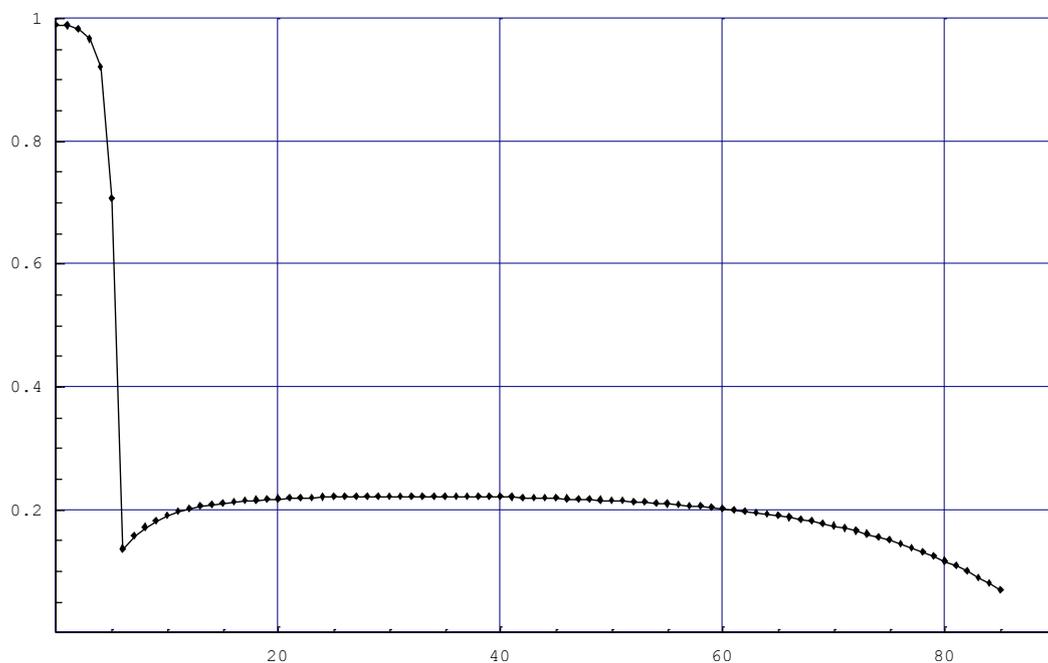


Рисунок 4.16 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 7,4 * 10^{-9}$)

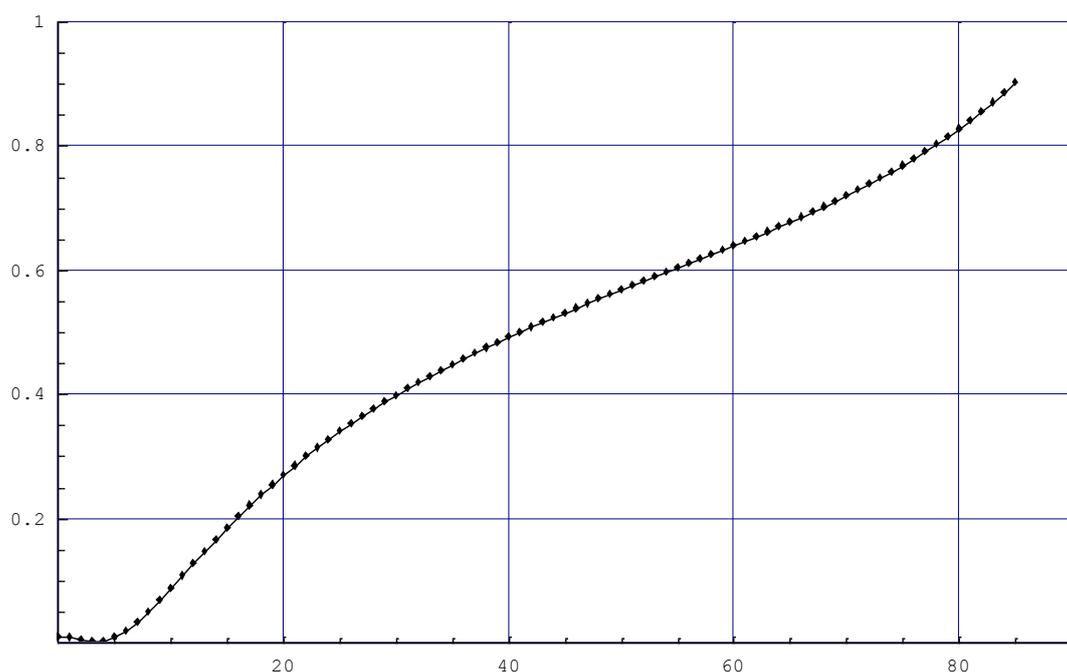


Рисунок 4.17 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 7,5 \cdot 10^{-9}$)

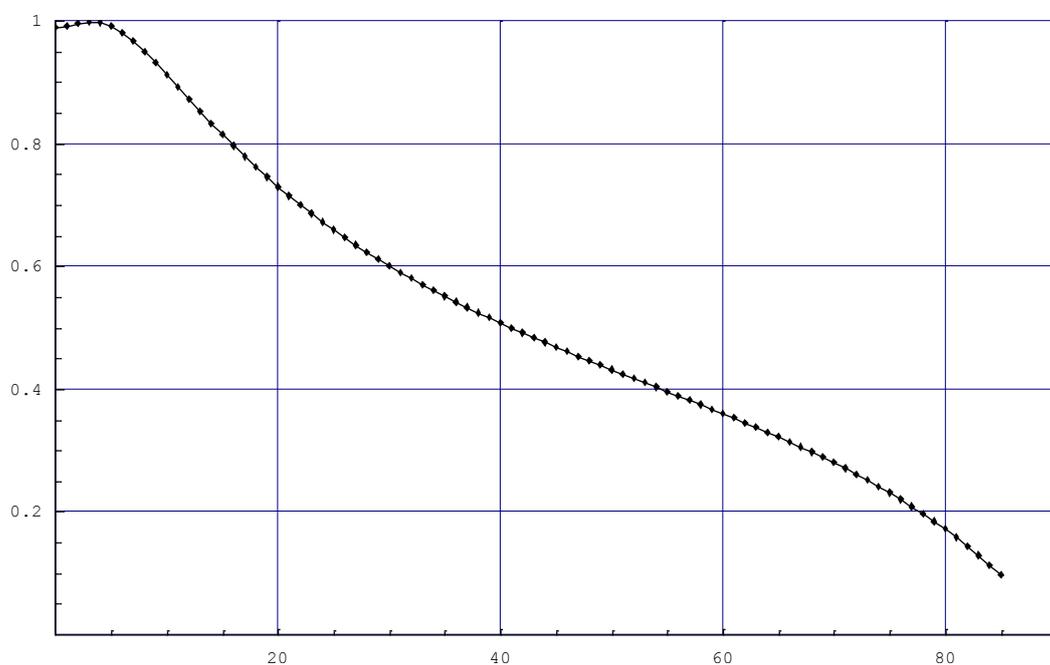


Рисунок 4.18 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 7,5 \cdot 10^{-9}$)

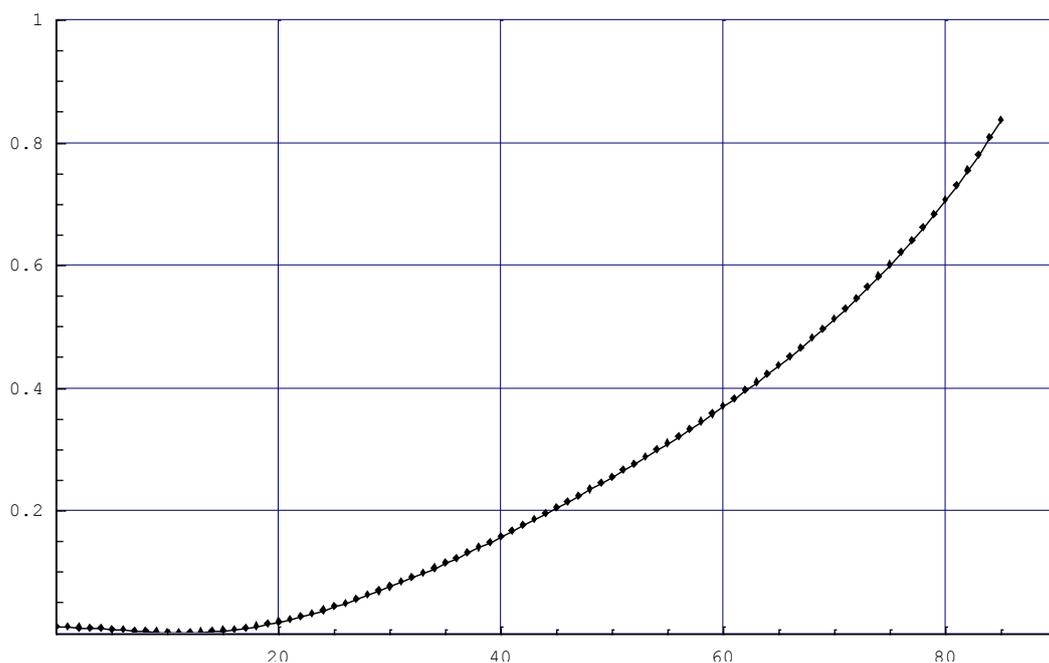


Рисунок 4.19 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 8 \cdot 10^{-9}$)

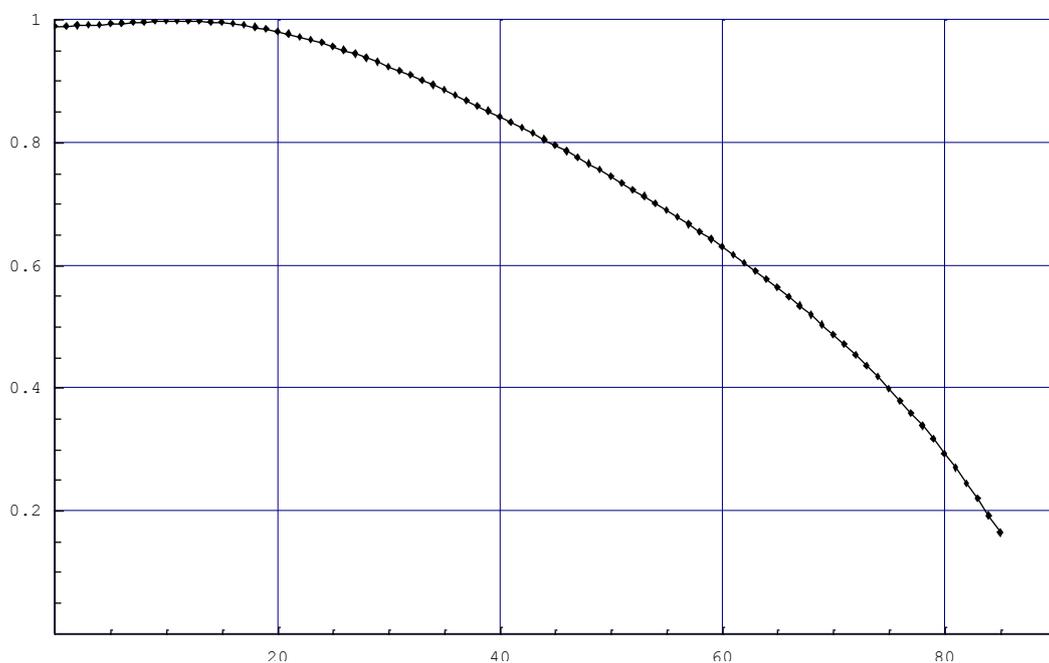


Рисунок 4.20 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_2 = 8 \cdot 10^{-9}$)

Графики (4.3) – (4.16) показывают, что максимум отраженной энергии наступает при падении электромагнитной волны под углом Брюстера. При углах больших угла Брюстера на графике образуется петля. При увеличении продольной составляющей магнитоэлектрического коэффициента максимум отраженной энергии смещается к началу координат, возрастает глубина петли. При $\alpha_2 > 7,4 * 10^{-9}$ максимум исчезает, график постепенно обретает форму параболы (графики 4.17 – 4.20)

Первая среда изотропная. Во второй среде рассматриваются различные значения поперечной составляющей магнитоэлектрического коэффициента.

Частота падающей электромагнитной волны

$$\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$$

Параметры первой среды:

$$\varepsilon = 1,5 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\mu = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Параметры второй среды:

$$\alpha_2 = 10^{-9};$$

$$\varepsilon_1 = 1 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\varepsilon_2 = 5 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\mu_1 = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м};$$

$$\mu_2 = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

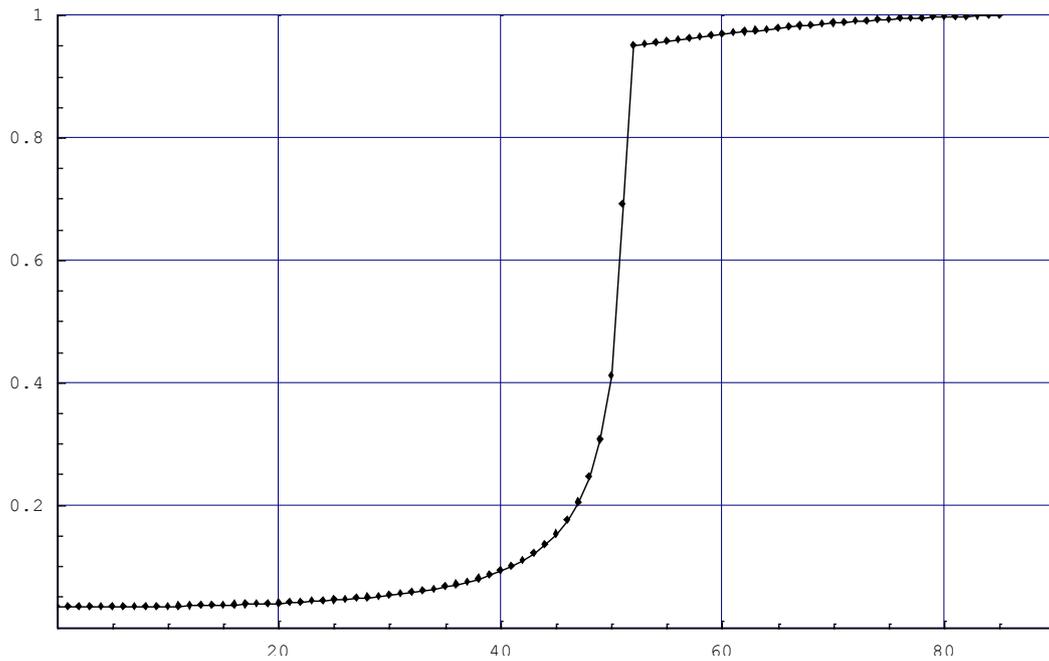


Рисунок 4.21 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_1 = 10^{-9}$)

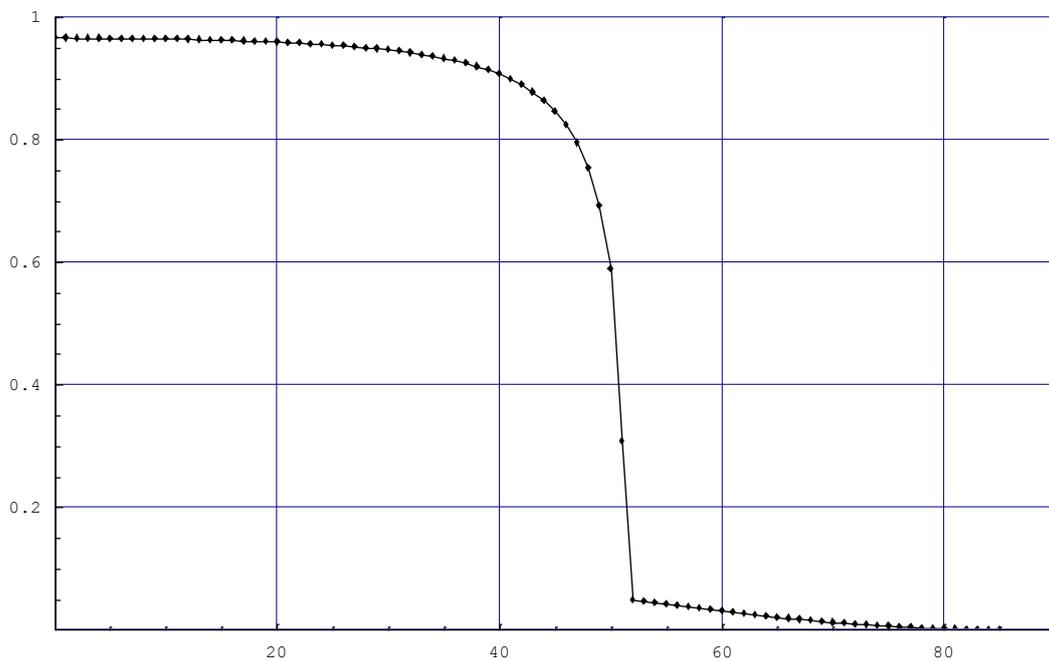


Рисунок 4.22 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_1 = 10^{-9}$)

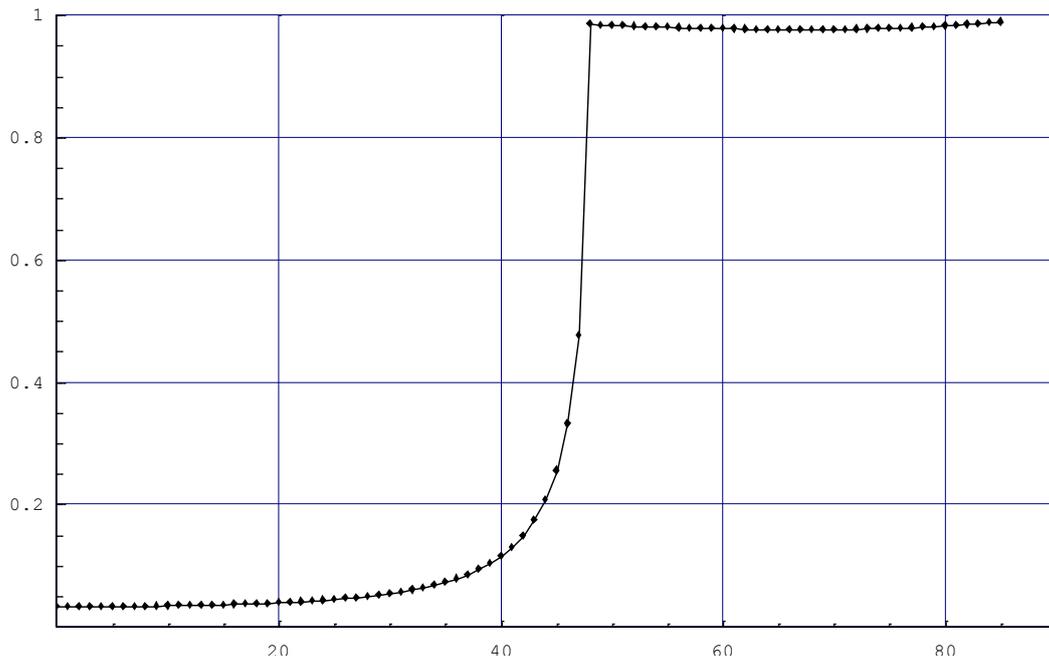


Рисунок 4.23 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_1 = 3 \cdot 10^{-9}$)

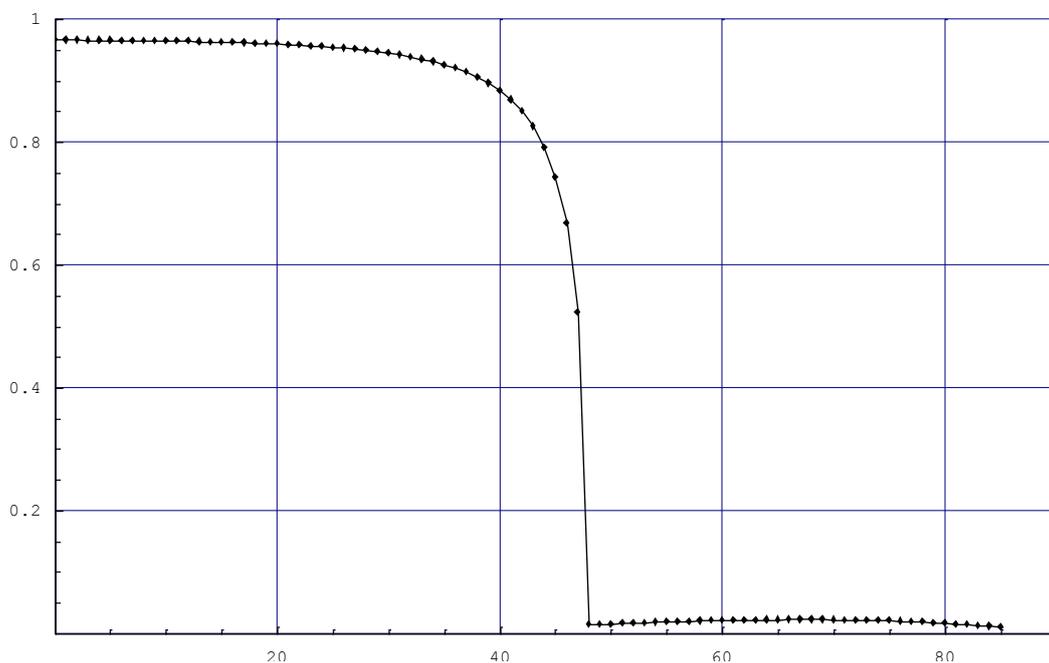


Рисунок 4.24 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_1 = 3 \cdot 10^{-9}$)

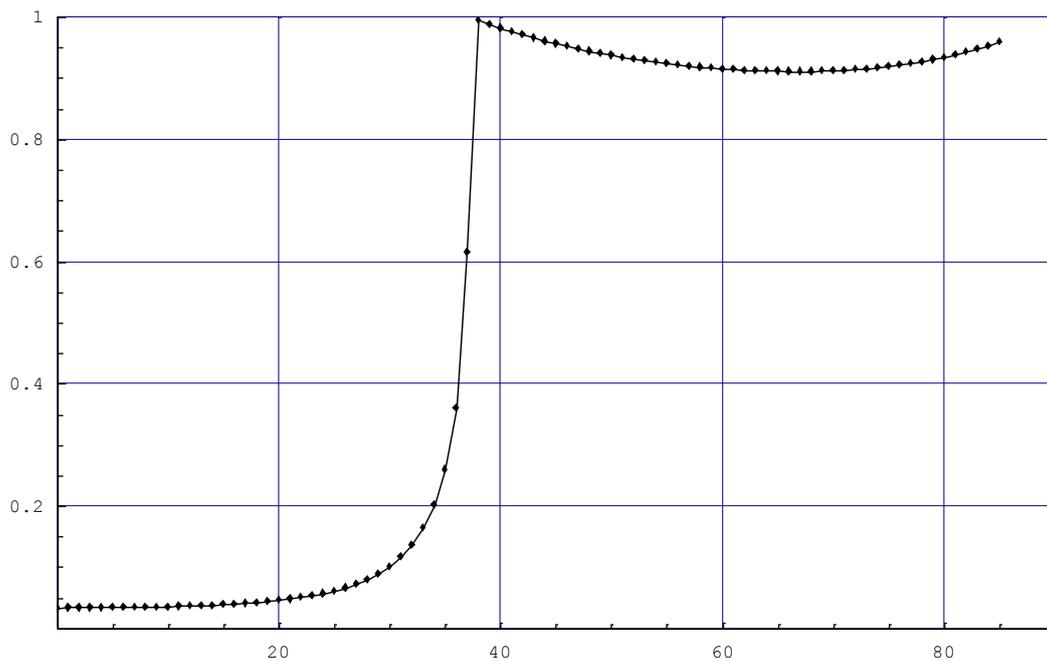


Рисунок 4.25 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_1 = 5 * 10^{-9}$)

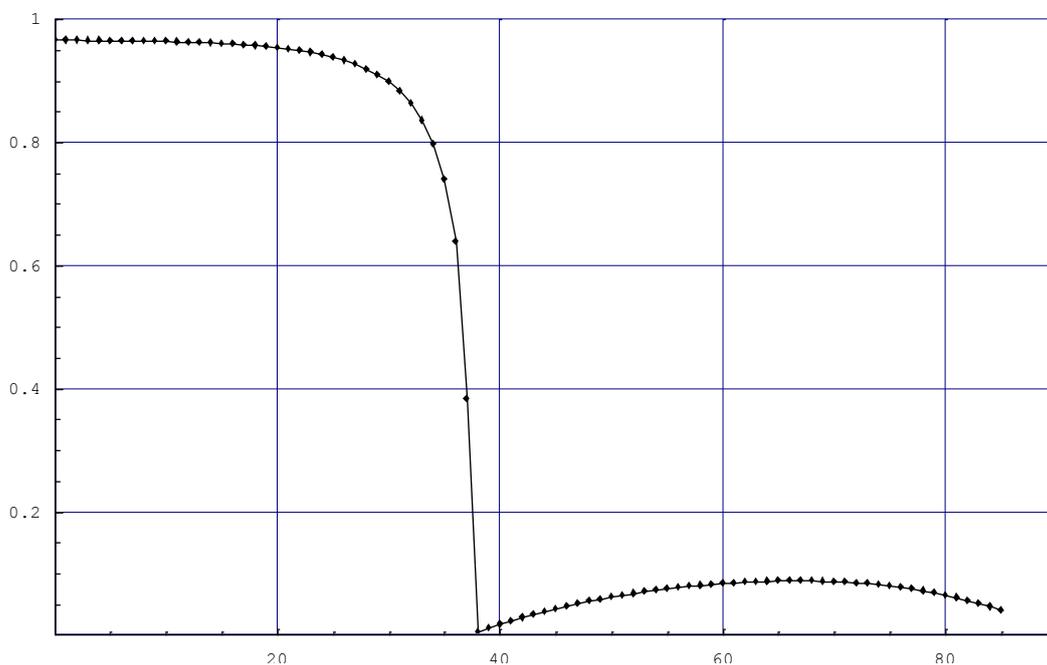


Рисунок 4.26 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_1 = 5 * 10^{-9}$)

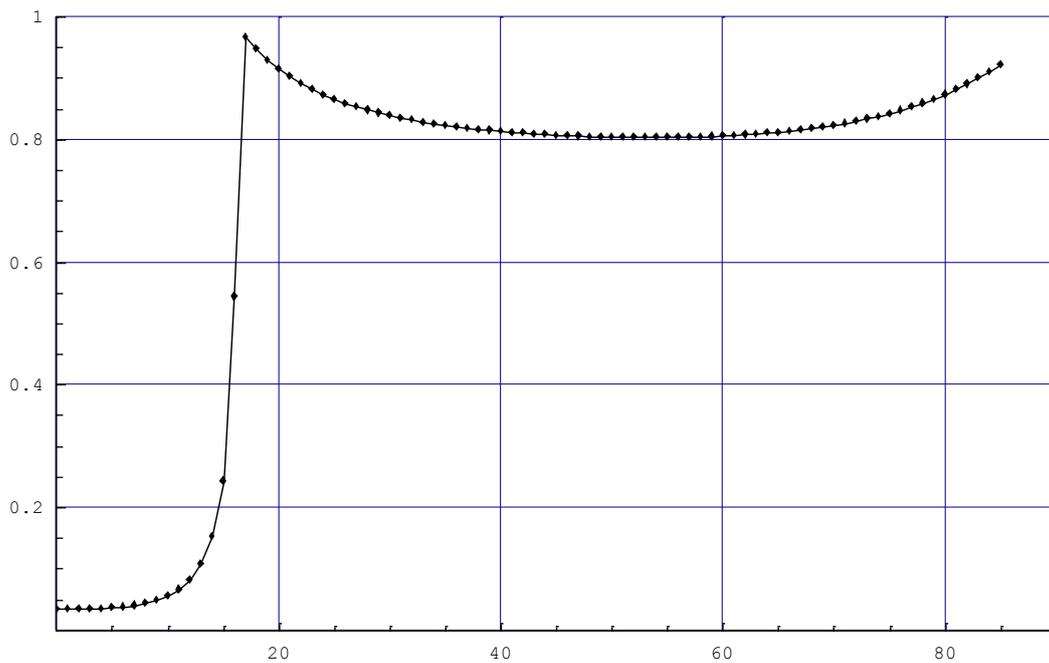


Рисунок 4.27 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_1 = 7 * 10^{-9}$)

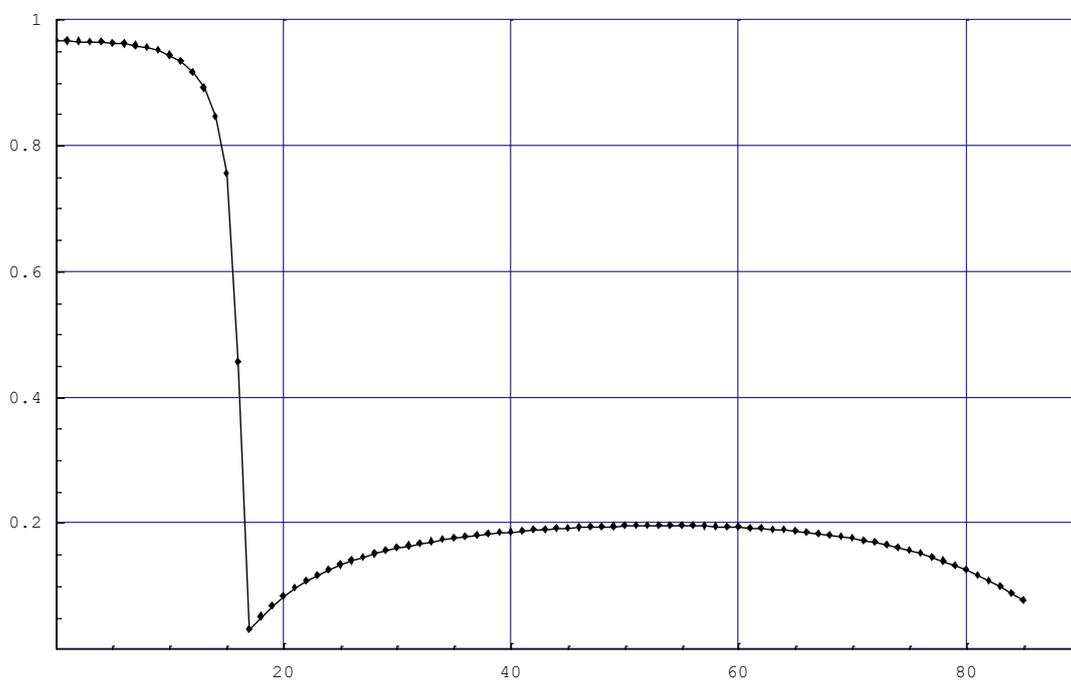


Рисунок 4.28 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_1 = 7 * 10^{-9}$)

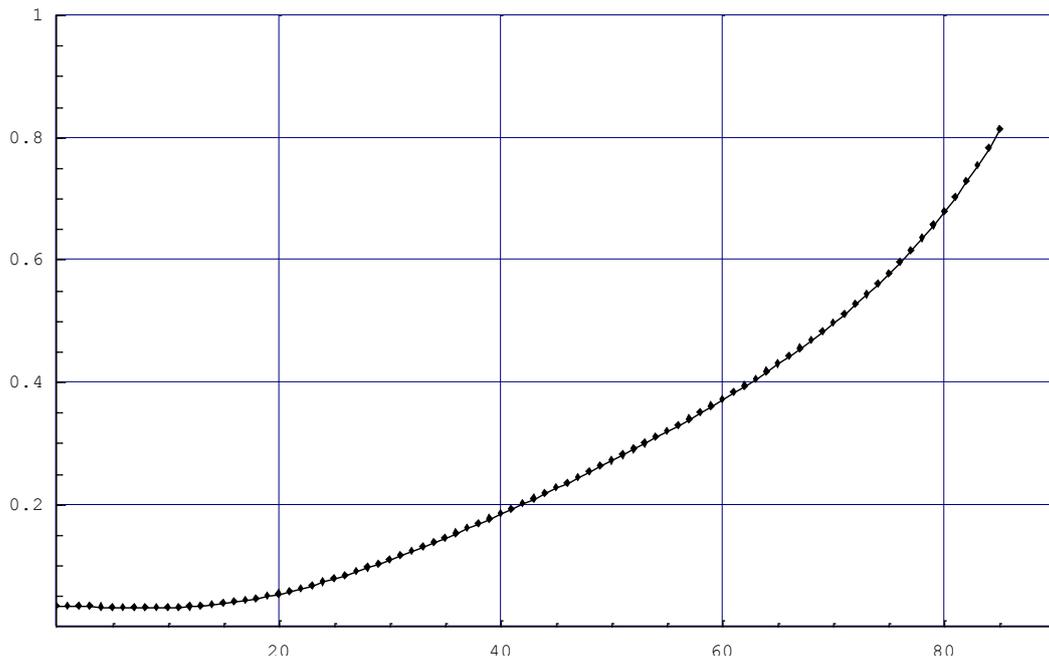


Рисунок 4.29 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_1 = 8 \cdot 10^{-9}$)

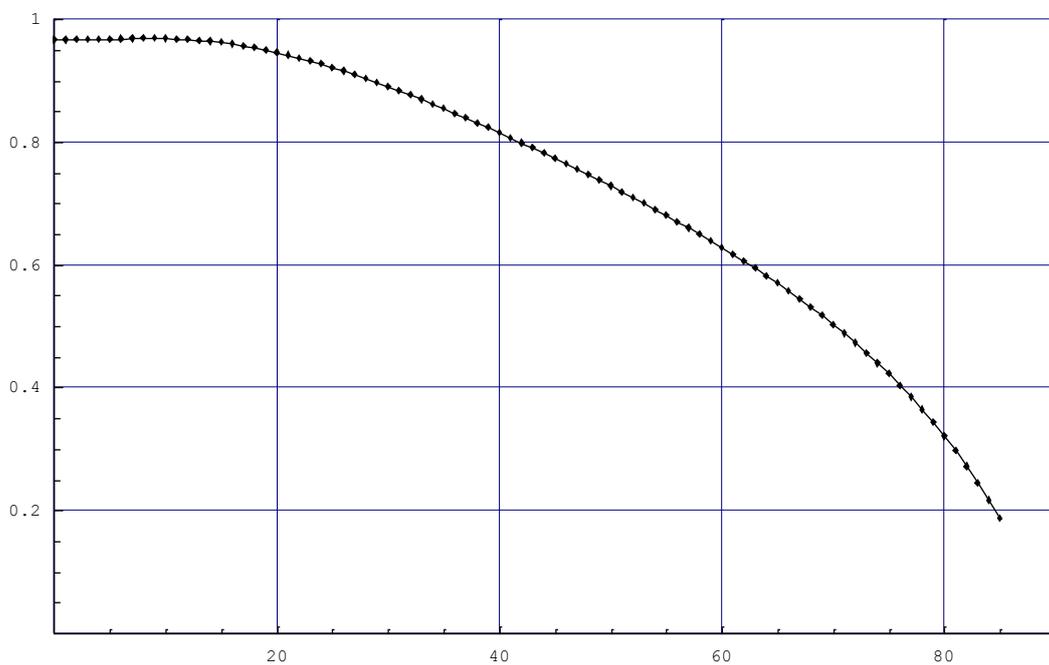


Рисунок 4.30 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТЕ волны от угла падения ($\alpha_1 = 8 \cdot 10^{-9}$)

Из графиков (4.21) и (4.22) видно, что энергетический коэффициент отражения достигает некоторой величины при падении электромагнитной волны под углом Брюстера и, при углах больших угла Брюстера, постепенно достигает 1.

Графики (4.23) – (4.30) показывают, что максимум отраженной энергии наступает при падении электромагнитной волны под углом Брюстера. При углах больших угла Брюстера на графике образуется петля. При увеличении продольной составляющей магнитоэлектрического коэффициента максимум отраженной энергии смещается к началу координат, возрастает глубина петли. При $\alpha_2 > 7 * 10^{-9}$ максимум исчезает, график постепенно обретает форму параболы.

4.2 Расчет плотности потоков в случае падения на границу двух сред ТМ волны

С помощью формул (4.68) и (4.70) энергетических коэффициентов отражения и преломления в случае падения на границу двух сред ТМ волны были построены графики зависимости энергетических коэффициентов отражения от угла падения.

Первая среда изотропная. Вторая - анизотропная среда без магнитоэлектрического эффекта.

Частота падающей электромагнитной волны

$$\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$$

Параметры первой среды:

$$\varepsilon = 1,5 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\mu = 1,5 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Параметры второй среды:

$$\alpha_1 = 0;$$

$$\alpha_2 = 0;$$

$$\varepsilon_1 = 2 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\varepsilon_2 = 1,5 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\mu_1 = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м};$$

$$\mu_2 = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Здесь ε , ε_1 , ε_2 – диэлектрические параметры первой и второй сред;

μ , μ_1 , μ_2 – магнитные параметры сред;

α_1 , α_2 – магнитоэлектрические параметры второй среды.

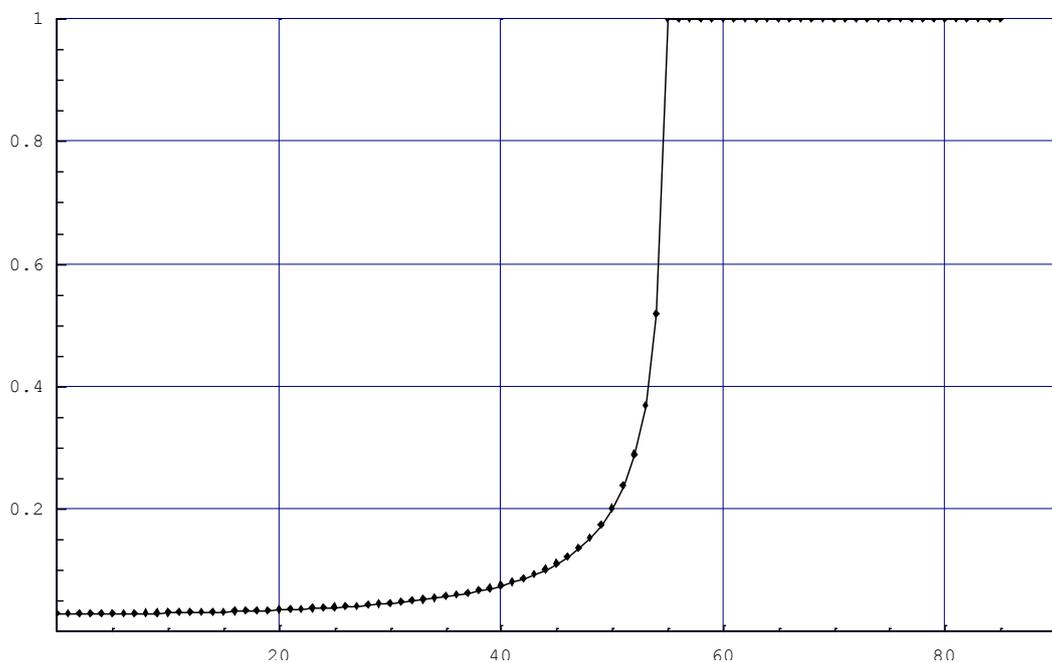


Рисунок 4.31 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения

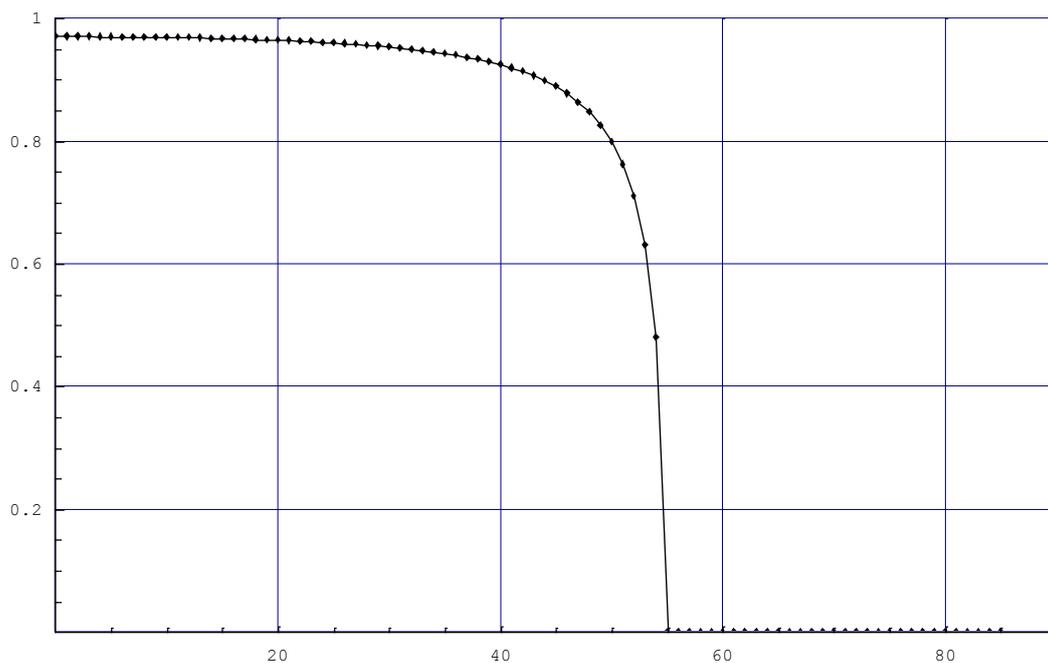


Рисунок 4.32 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения

Из графиков (4.31) и (4.32) видно, что при углах больших, чем угол полного отражения, волна отражается полностью.

Первая среда изотропная. Во второй среде рассматриваются различные значения продольной составляющей магнитоэлектрического коэффициента.

Частота падающей электромагнитной волны

$$\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$$

Параметры первой среды:

$$\varepsilon = 1,5 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\mu = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Параметры второй среды:

$$\alpha_1 = 10^{-9};$$

$$\varepsilon_1 = 1 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\varepsilon_2 = 5 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\mu_1 = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м};$$

$$\mu_2 = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

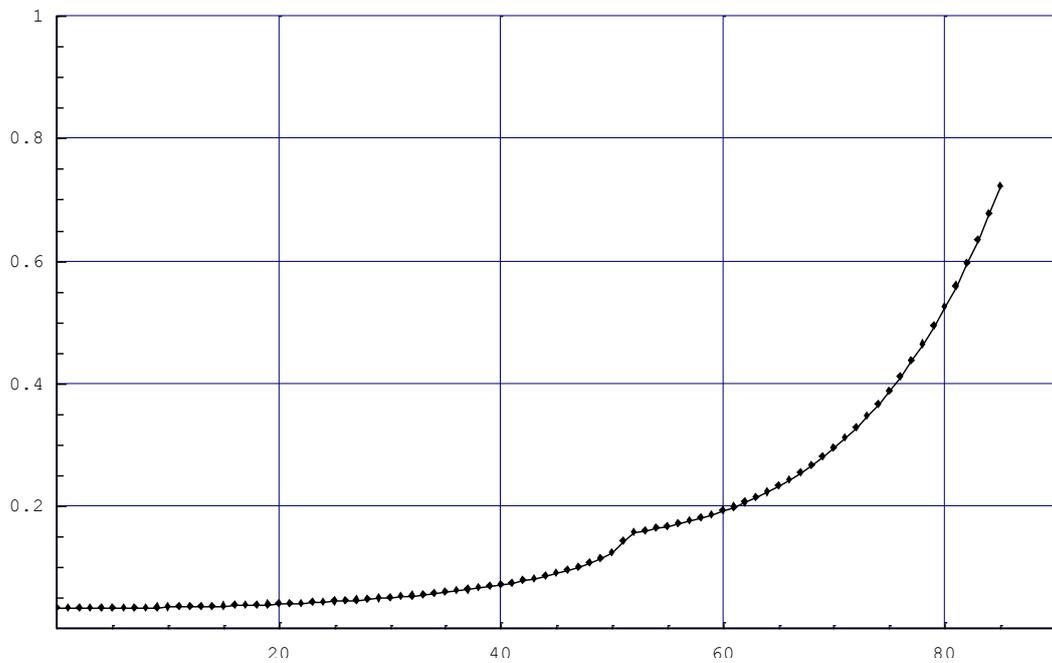


Рисунок 4.33 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_2 = 10^{-9}$)

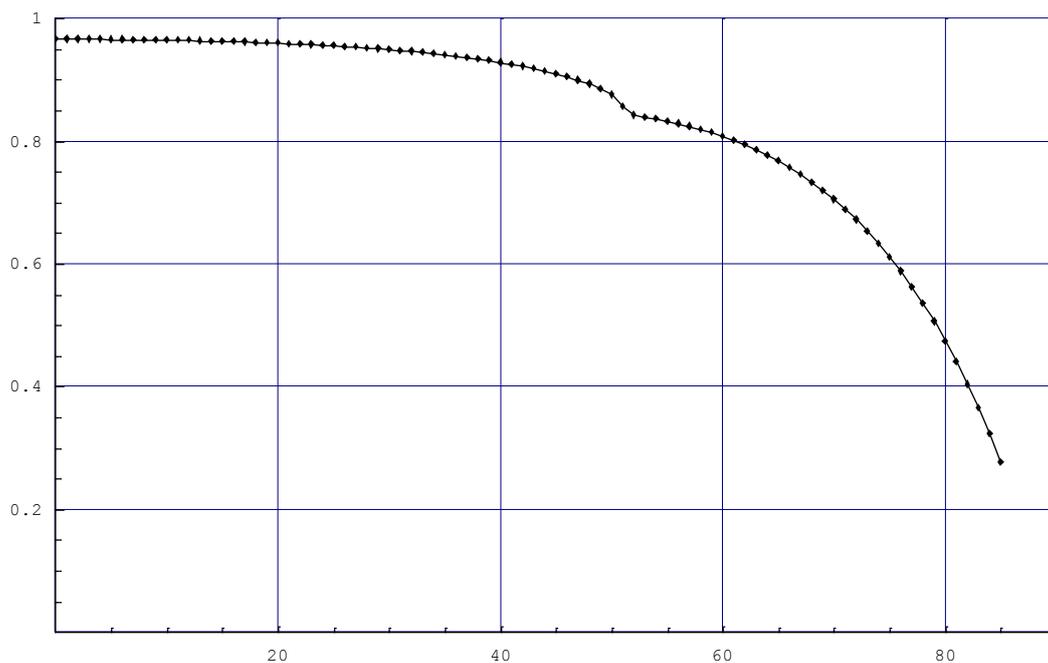


Рисунок 4.34 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_2 = 10^{-9}$)

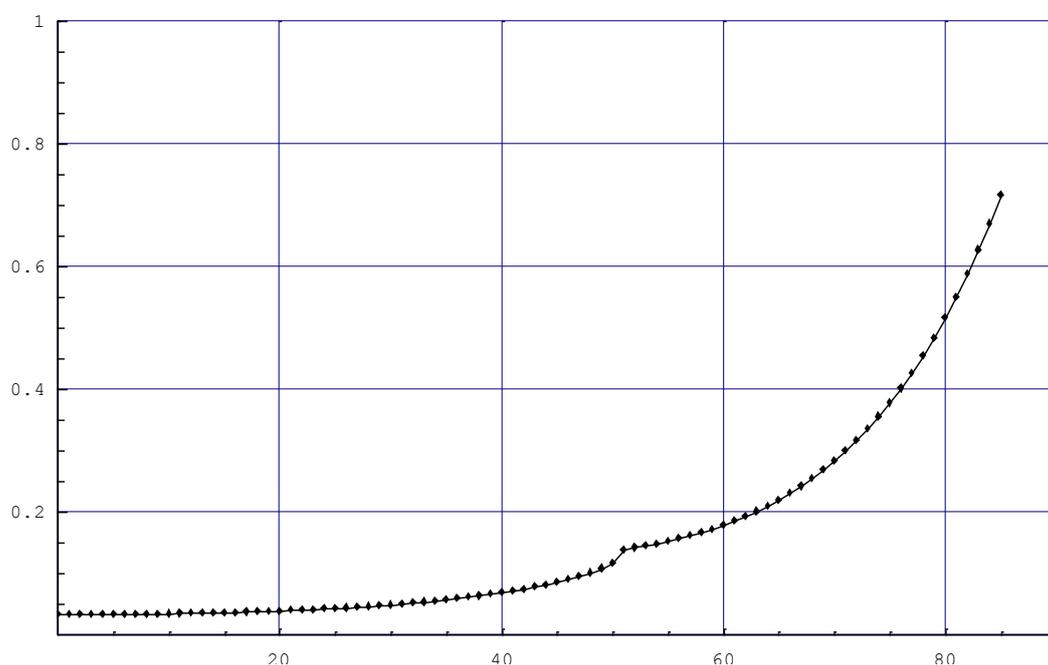


Рисунок 4.35 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_2 = 1,5 * 10^{-9}$)

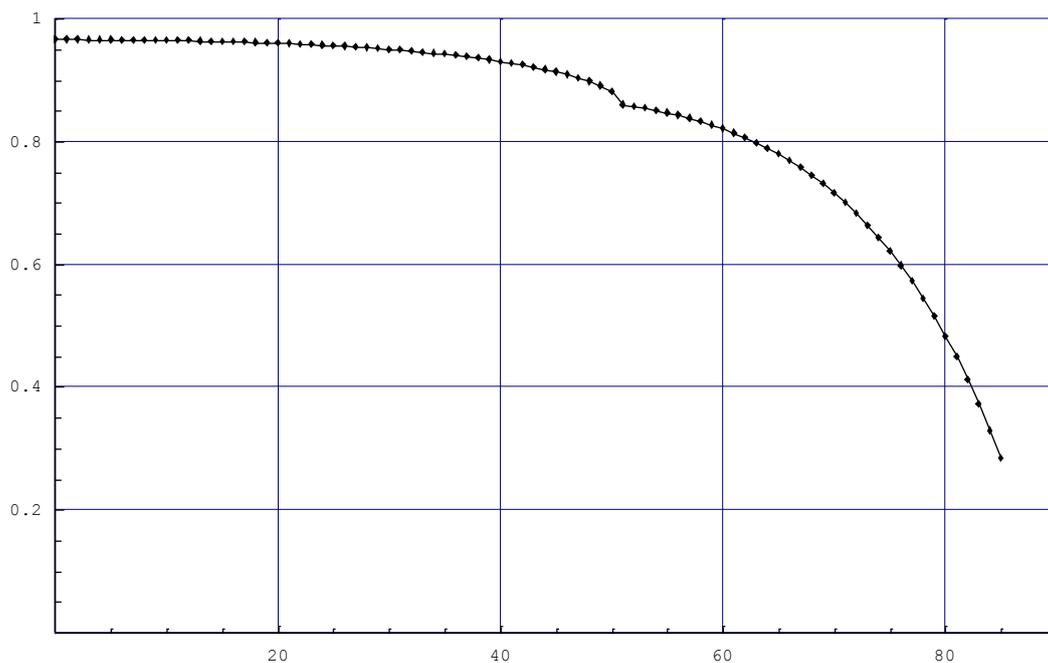


Рисунок 4.36 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_2 = 1,5 * 10^{-9}$)

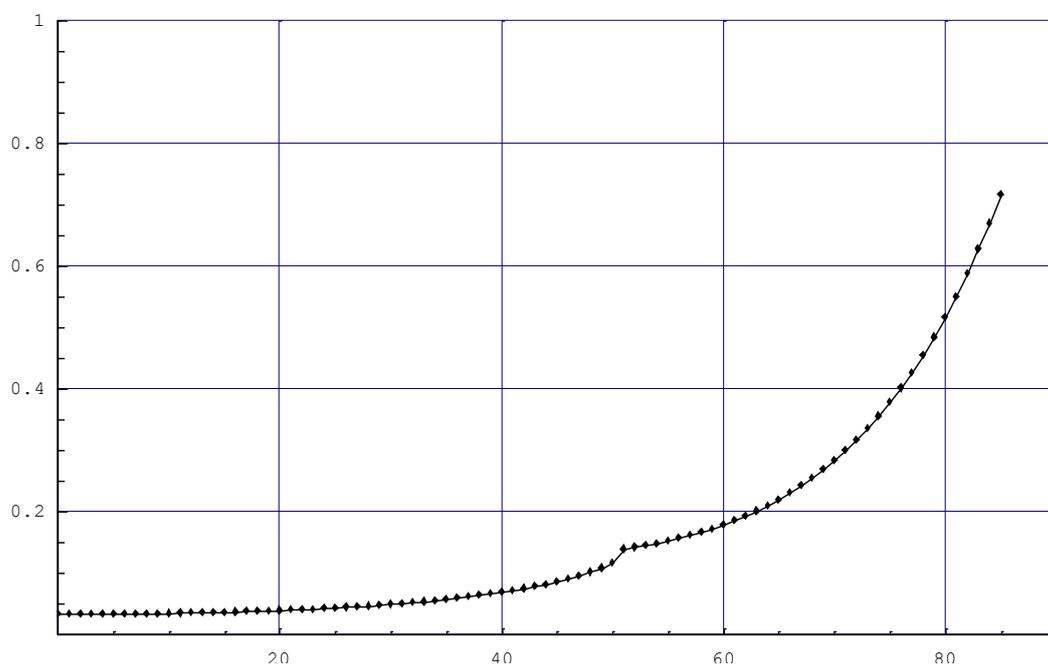


Рисунок 4.37 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_2 = 1,5 * 10^{-9}$)

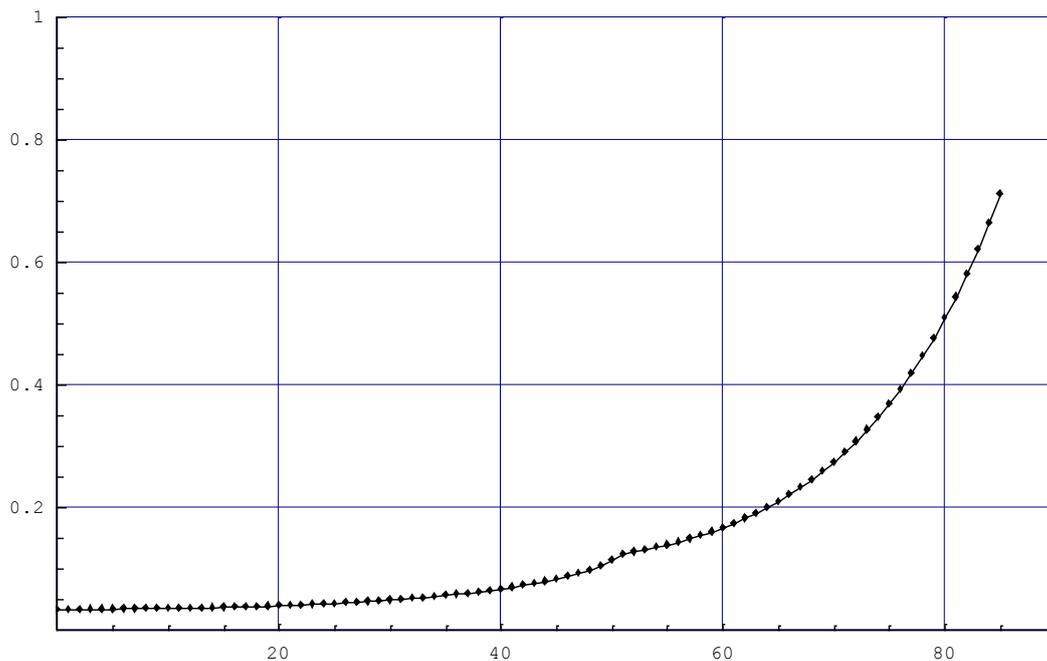


Рисунок 4.38 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_2 = 2 * 10^{-9}$)

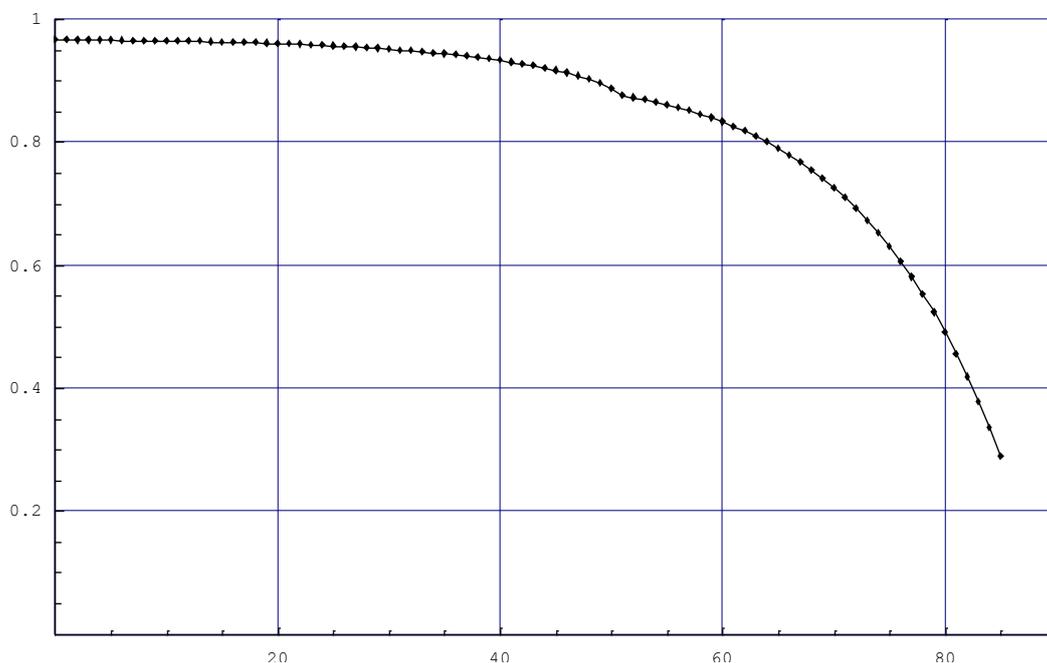


Рисунок 4.39 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_2 = 2 * 10^{-9}$)

На графиках (4.33) – (4.39) есть небольшой «скачок», который уменьшается при увеличении продольной составляющей магнитоэлектрического коэффициента

Первая среда изотропная. Во второй среде рассматриваются различные значения поперечной составляющей магнитоэлектрического коэффициента.

Частота падающей электромагнитной волны

$$\omega = 10^8 \text{ с}^{-1}$$

Параметры первой среды:

$$\varepsilon = 1,5 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\mu = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

Параметры второй среды:

$$\alpha_2 = 10^{-9};$$

$$\varepsilon_1 = 1 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\varepsilon_2 = 5 * 8,85 * 10^{-12} \text{ Ф/м};$$

$$\mu_1 = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м};$$

$$\mu_2 = 1 * 4\pi * 10^{-7} \text{ Гн/м}.$$

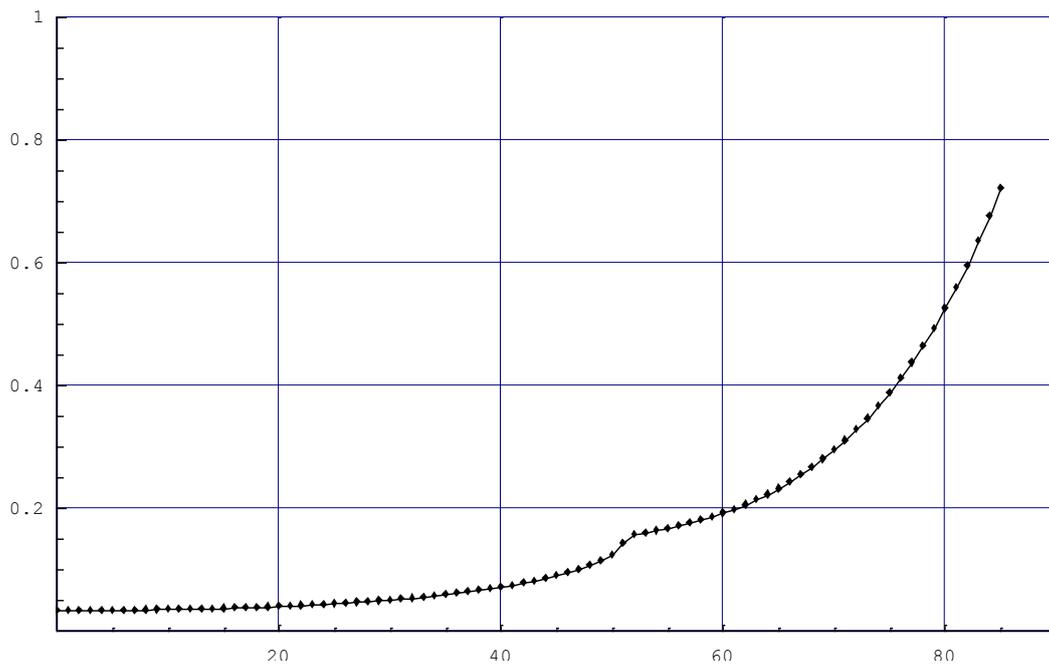


Рисунок 4.40 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_1 = 10^{-9}$)

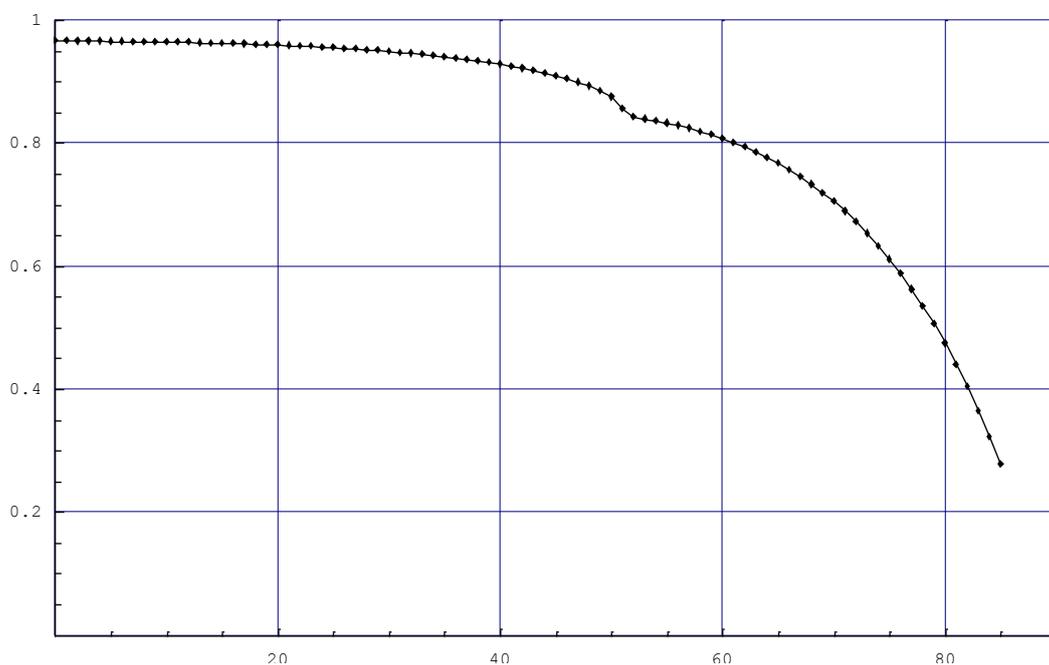


Рисунок 4.41 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_1 = 10^{-9}$)

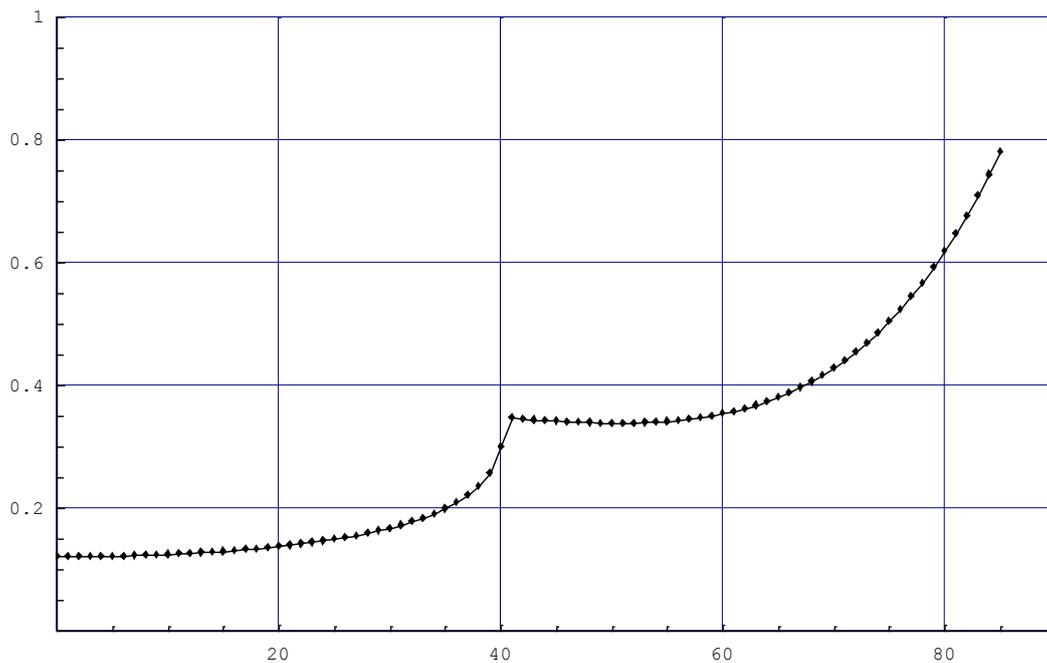


Рисунок 4.42 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_1 = 2 * 10^{-9}$)

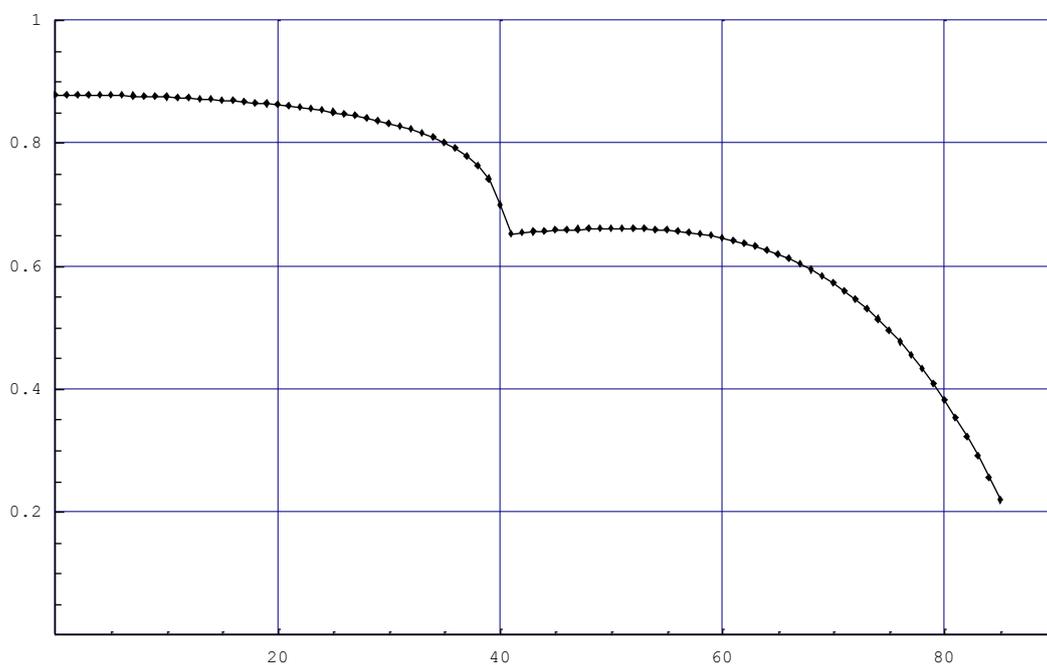


Рисунок 4.43 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_1 = 2 * 10^{-9}$)

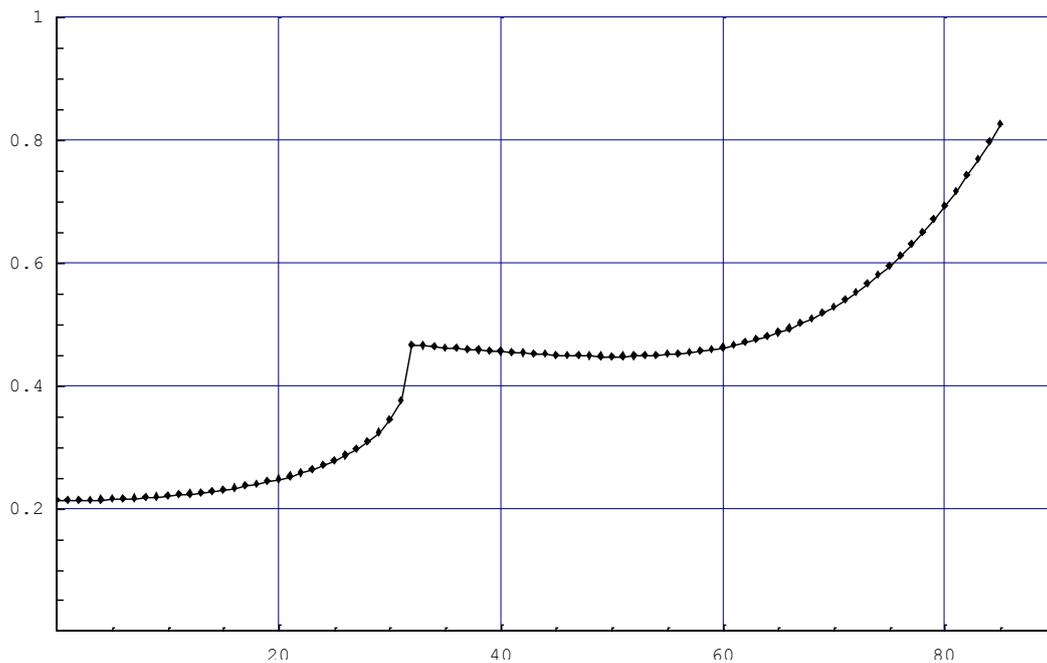


Рисунок 4.44 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_1 = 2,5 * 10^{-9}$)

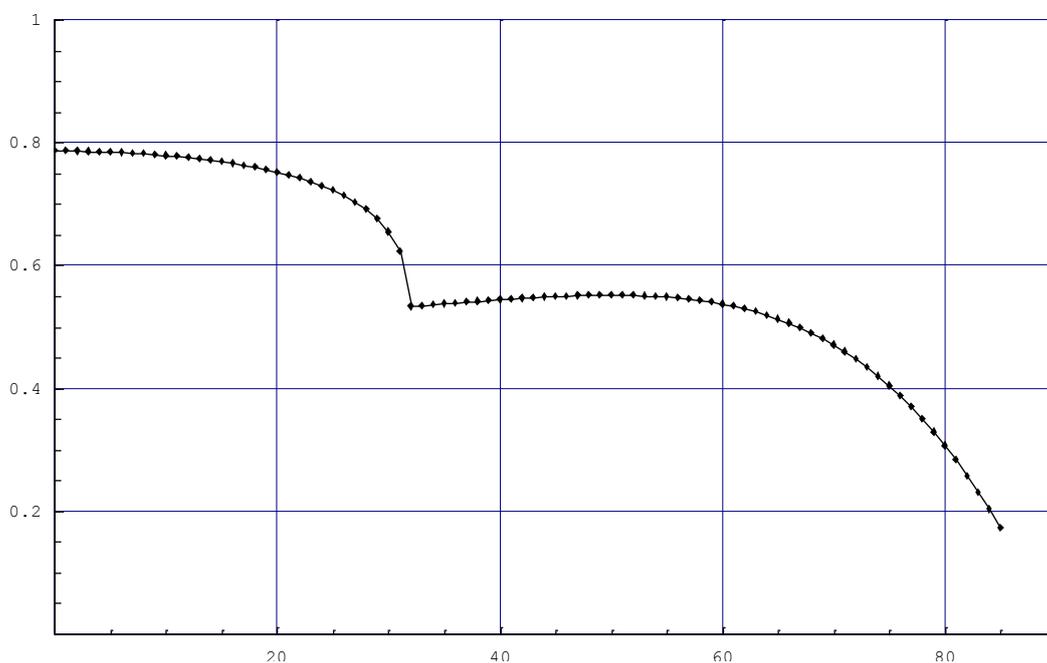


Рисунок 4.45 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_1 = 2,5 * 10^{-9}$)

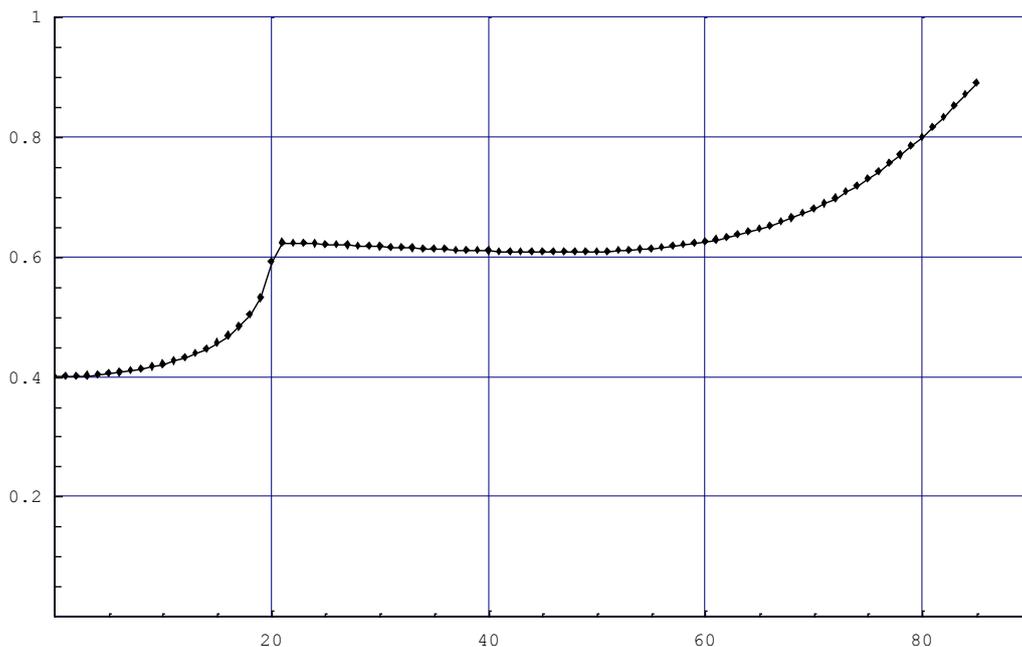


Рисунок 4.46 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_1 = 3 \cdot 10^{-9}$)

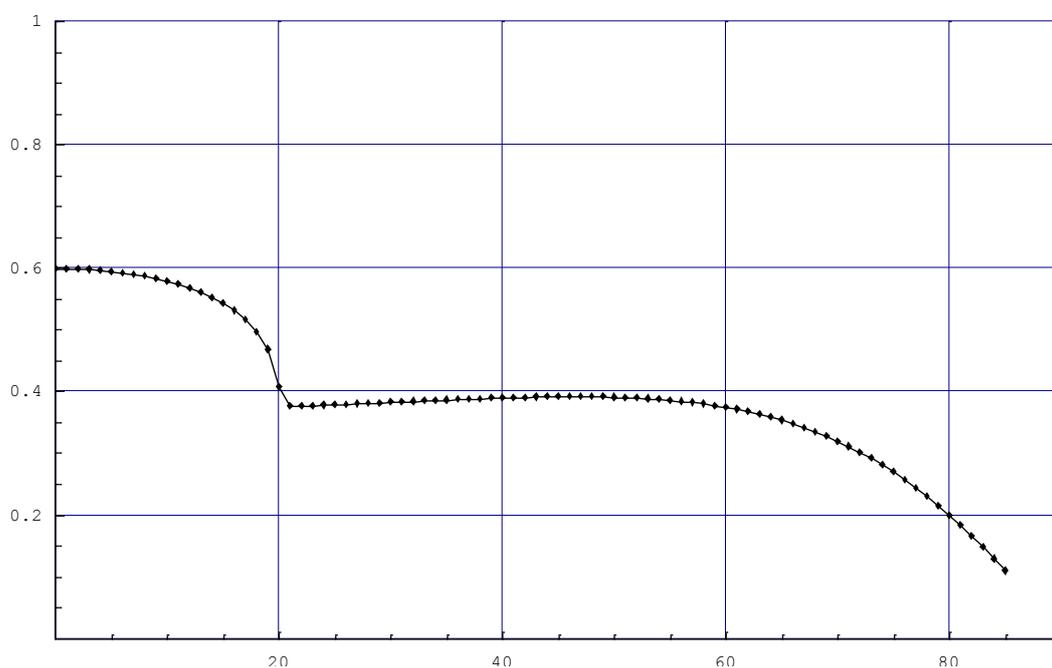


Рисунок 4.47 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_1 = 3 \cdot 10^{-9}$)

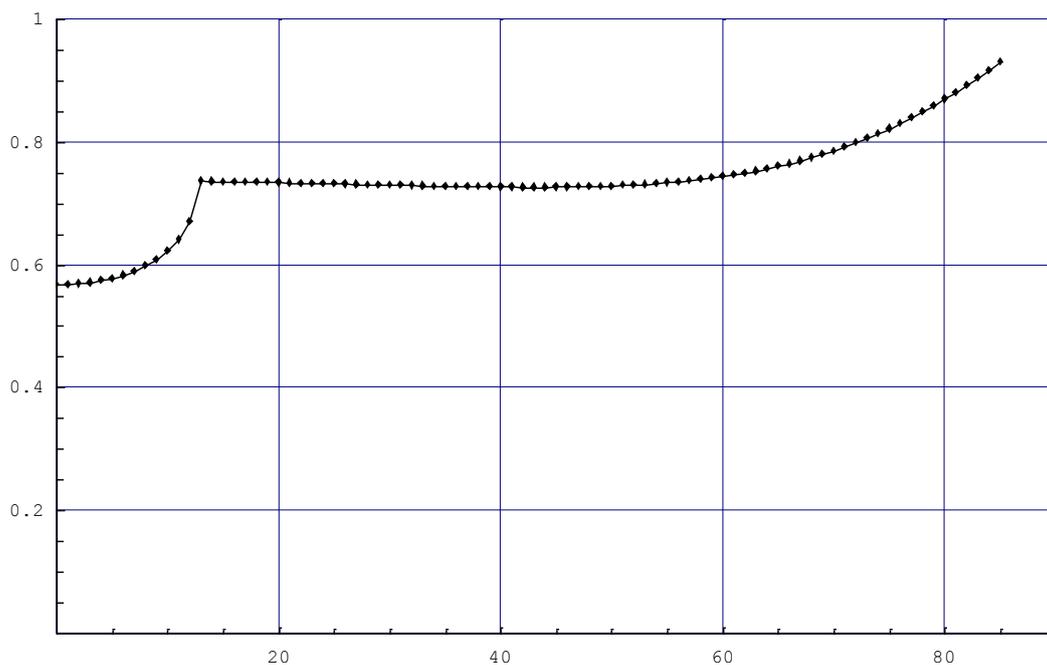


Рисунок 4.48 – График зависимости энергетического коэффициента отражения при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_1 = 3,2 * 10^{-9}$)

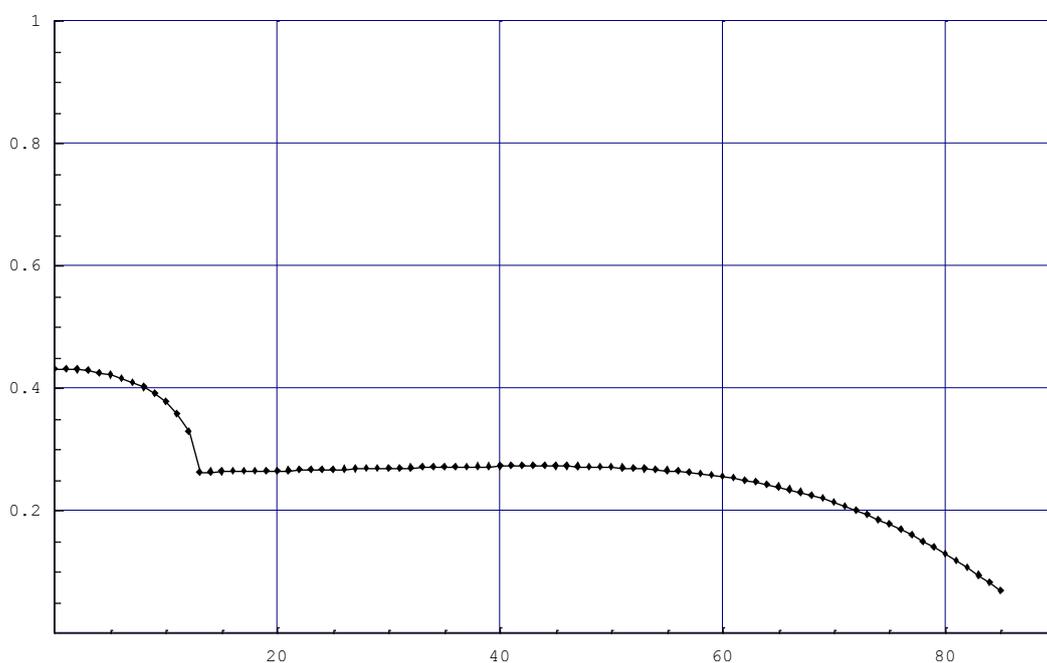


Рисунок 4.49 – График зависимости энергетического коэффициента преломления при падении электромагнитной ТМ волны от угла падения ($\alpha_1 = 3,2 * 10^{-9}$)

При увеличении поперечной составляющей магнитоэлектрического коэффициента максимум отраженной энергии смещается к началу координат, увеличивается коэффициент отражения при нормальном падении электромагнитной волны.

Заключение

Основные результаты монографии заключаются в следующем:

1) На основе метода разделения переменных и представления решения в виде плоских гармонических волн уравнения Максвелла и определяющие соотношения, описывающие распространение электромагнитных волн в анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом приведены к эквивалентной системе обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами;

2) Получены матрицы коэффициентов для тетрагональной, тригональной и гексагональной сингоний в объемном и плоских случаях.

3) Построена структура матриц фундаментальных решений системы дифференциальных уравнений 1-го порядка, описывающих распространение электромагнитных волн в анизотропных средах тетрагональной, тригональной и гексагональной сингоний с магнитоэлектрическим эффектом в объемном и плоских случаях;

4) Получены уравнения дисперсии электромагнитных волн в неограниченных периодических структурах;

5) Построены усредненные матрицанты однородных анизотропных сред с магнитоэлектрическим эффектом;

6) Сформулирована матричная постановка и получено аналитическое решение задачи отражения и преломления электромагнитных волн на границе изотропной среды и анизотропной среды с магнитоэлектрическим эффектом;

7) Проведен численный анализ энергетических коэффициентов отражения и преломления при отражении электромагнитных волн на границе изотропной среды и анизотропной среды с магнитоэлектрическим эффектом; построены графики зависимости энергетических коэффициентов отражения и преломления от угла падения электромагнитных волн.

Литература

- 1 Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Статистическая физика. – М. : Наука, 1976. – 564 с.
- 2 Дзялошинский И. Б. К вопросу о магнитоэлектрическом эффекте в антиферромагнетиках // ЖЭТФ, 1959. – Т. 37. – С. 881–882.
- 3 Астров Д. Н. Магнитоэлектрический эффект в окиси хрома // ЖЭТФ, 1961. – Т. 40. – С. 1035–1041.
- 4 Folen V. J., Rado G. T., Stalder E. W. Anisotropy of the magnetoelectric effect in Cr₂O₃ // Phys. Rev. Lett, 1961., V. 6. – №11. – P. 607–608.
- 5 Asher E. The interaction between magnetization and polarization: Phenomenological symmetry consideration // J. Phys. Soc. J., 1969. – V. 28. – P. 7–16.
- 6 Santoro R. P. and Newnham R. E. Survey of Magnetoelectric Materials, Technical Report AFML TR-66-327. Air Force Materials Lab. – Ohio, 1966.
- 7 Yatom H. and Englman R. Theoretical Methods in Magnetoelectric Effect // Phys. Rev. B, 1969. – V. 188. – С. 793–802.
- 8 Englman R. and Yatom H. Low Temperature Theories of Magnetoelectric Effect // Proc. Of Symposium on Magnetoelectric Interaction in Crystals, USA, 1973 / Ed Freeman A and Schmid A. Gordon and Breach Sci. Publ. – N.-Y., 1975. – P. 17–29.
- 9 Schmid H. On a Magnetoelectric Classification of Materials // Proc. of Symposium on Magnetoelectric Interaction in Crystals, USA, 1973 / Eds. Freeman A and Schmid H. Gordon and Breach Sci. Publ. – N.-Y., 1975. – P. 121–134.
10. Rado G. T. Statistical Theory of Magnetoelectric Effect in an Antiferromagnetics // Phys. Rev., 1962. – V. 128. – P. 2546–2559.
- 11 Opechovski W. Magnetoelectric Symmetry // Proc. of Symposium on Magnetoelectric Interaction in Crystals, USA, 1973 / Ed Freeman A and Schmid A. Gordon and Breach Sci. Publ. – N.-Y., 1975. – P. 47–58.
- 12 O'Dell T. H. The electrodynamics of magnetoelectric media. – Amsterdam: North-Holland Publ. Company, 1970. – 304 p.
- 13 Fuchs R. Wave Propagation in a Magnetoelectric Medium // Phys. Mag., 1965. – V. 11. – P. 647–658.
- 14 Aubert G. A Novel Approach of the Magnetoelectric Effect in Antiferromagnets // J. Appl. Phys. 1982. – V. 53. – P. 8125–8129.
- 15 Шавров В. Г. О магнитоэлектрическом эффекте // ЖЭТФ, 1965, Т. 48. – №5. – С. 1419–1426.

16 Alexander S. and Shtrikman S. On the Origin of Axial Magnetoelectric Effect of Cr₂O₃ // Sol. State. Comm. – 1966. – V. 4. – P. 115–125.

17 Asher E. The interaction between magnetization and polarization: Phenomenological symmetry consideration // J. Phys. Soc. J. – 1969. – V.28. – P. 7–16.

18 Rado G. T. Observation and Possible Mechanisms of Magnetoelectric Effect in Ferromagnet // Phys. Rev. Lett. – 1964 – V. 13 – P. 335–337.

19 Rado G. T. Present Status of the Theory of Magnetoelectric Effects // Proc. of Symposium on Magnetoelectric Interaction in Crystals, USA, 1973 / Ed Freeman A and Schmid H. Gordon and Breach Sci. Publ. – N.-Y – 1975 – P. 3–22.

20 Бичурин М. И., Петров В. М. Влияние электрического поля на спектр антиферромагнитного резонанса в борате железа // ФТТ. – 1987. – Т29. – № 8.0. – С. 2509–2510.

21 Magnetoelectric Interaction Phenomena in Crystals / Eds. A. J. Freeman, H. Schmid. London. – N.-J. Paris: Gordon and Breach, 1975. – 228 p.

22 Смоленский Г. А., Чупис И. Е. Сегнетомагнетики // УФН. – 1982. – Т. 137. – №3. – С. 415–448.

23 Веневцева Ю. Н. Сегнетомагнитные вещества / Под ред. Ю.Н. Веневцева, В.Н. Любимова. – М: Наука, 1990. – 184 с.

24 Proceedings of the 2nd International Conference on Magnetoelectric Interaction Phenomena in Crystals (MEIPIC-2, Ascona). Eds. H.Schmid et al. // Ferroelectrics. – 1993. – V. 161–162. – 748 p.

25 Proceedings of the 3rd International Conference on Magnetoelectric Interaction Phenomena in Crystals (MEIPIC-3, Novgorod). Ed. M.I.Bichurin // Ferroelectrics. – 1997. – V. 204 – 356 p.

26 Proceedings of the Fourth Conference on Magnetoelectric Interaction Phenomena in Crystals (MEIPIC-4, Veliky Novgorod). Ed. M.I.Bichurin // Ferroelectrics – 2002. – V. 279–280 – 386 p.

27 Бичурин М. И., Петров В. М., Филиппов Д. А., Сринивасан Г. Магнитоэлектрический эффект в композиционных материалах / ИПЦ НовГУ. – Великий Новгород, 2005. – 227 с.

28 Дзялошинский И. Е. Проблема пьезомагнетизма // ЖЭТФ. – 1957. – Т. 33. – С. 807–812.

29 Van den Boomgard J., van Run A.M.J.G. and van Suchtelen J. Piezoelectric-Piezomagnetic Composites with Magnetoelectric Effect // Ferroelectrics. – 1976. – V. 14. – P. 727–732.

30 Van den Boomgard J., van Run A.M.J.G. Poling of a Ferroelectric Medium by means of a Built-in Space Charge Field with Special Reference to Sintered Magnetolectric Composites // *Solid State Comm.* – 1976. – V. 19. – P. 405–407.

31 Van den Boomgard J. and Born R.A.J. Sintered Magnetolectric Composite Material BaTiO₃Ni(Co, Mn)Fe₂O₄ // *J. Mater. Sci.* – 1978. – V. 13. – P. 1538–1539.

32 Bunget I. and Raetchi V. Magnetolectric Effect in the Heterogeneous System NiZn Ferrite – PZT Ceramic // *Phys. Stat. Sol.* – 1981. – V. 63. – P. 55.

33 Bunget I. and Raetchi V. Dynamic Magnetolectric Effect in the Composite System of NiZn Ferrite and PZT Ceramics // *Rev. Roum. Phys.* – 1982. – V. 27. – P. 401–404.

34 Nan C. W., Yuanhua Lin and Huang Jin H. Magnetolectricity of Multiferroic Composites // *Ferroelectrics.* – 2002. – Vol. 280. – P. 153–163.

35 Cai N., Zhai J., Nan C.-W., Lin Y. and Shi Z. Dielectric, ferroelectric, magnetic and magnetolectric properties of multiferroic laminated composites // *Phys. Rev.* – 2003. – V. B 68. – P. 224103 (1–7).

36 Dong S. X., Li J. F. and Viehland D. Giant Magneto-Electric Effect in Laminate Composites // *IEEE Trans. Ultrason. Ferroelectr. Frequency Control.* – 2003. – V. 50. – P.1236–1239.

37 Ryu J., Carazo A. V., Uchino K. and Kim H. E. Magnetolectric Properties in Piezoelectric and Magnetostrictive Laminate Composites // *Japan. J. Appl. Phys.* – 2001. – V. 40. – P. 4948–4951.

38 Ryu J., Priya S., Carazo A. V., Uchino K. and Kim H. E. Effect of Magnetostrictive Layer on Magnetolectric Properties in Lead Zirconate Titanate/Terfenol-D Laminate Composites // *J. Am. Ceram. Soc.* – 2001. – V. 84. – P. 2905–2908.

39 Ryu J., Carazo A. V., Uchino K. and Kim H. E. Piezoelectric and Magnetolectric Properties of Lead Zirconate Titanate/Ni-Ferrite Particulate Composites // *J. Electroceram.* – 2001. – V. 7. – P. 17–24.

40 Бичурин М. И., Петров В. М. Магнитный резонанс в слоистых феррит-сегнетоэлектрических структурах // *ЖТФ.* – 1988. – № 11. – Т. 58. – С.2277–2278.

41 Бичурин М. И. Резонансные магнитоэлектрические эффекты в парамагнитных и магнитоупорядоченных средах на сверхвысоких частотах: докторская диссертация / Новгородский политехн. ин-т. – Новгород, 1988. – 288 с.

42 Никифоров И. С. Резонансный магнитоэлектрический эффект в оксиде хрома и борате железа: кандидатская диссертация /

Новгородский государственный университет. – Великий Новгород, 2004. – 166 с.

43 Филиппов Д. А. Магнитоэлектрический эффект в магнитоупорядоченных кристаллах с 3d - ионами и феррит – пьезоэлектрических композитах в области магнитного и электромеханического резонансов : дис... докт. физ. - мат. наук. – В. Новгород, 2004. – 196 с.

44 Петров В. М. Магнитоэлектрические свойства композиционных феррит-пьезоэлектрических материалов: докторская диссертация / Новгородский государственный университет. – Великий Новгород, 2004. – 186с.

45 Петров Р. В. Магнитоэлектрические фазовращатели СВЧ диапазона: кандидатская диссертация / Новгородский гос. ун-т. – Новгород, 1997. – 120 с.

46 Килиба Ю. В. Разработка магнитоэлектрических датчиков магнитного поля и СВЧ мощности на основе композиционных материалов: кандидатская диссертация / Новгородский гос. ун-т. – Новгород, 2003. – 124 с.

47 Fiebig M. Revival of the magnetoelectric effect // J. Phys. D: Appl. Phys. – 2005. – V. 38. – P. R1–R30.

48 Van den Boomgard J., van Run A.M.J.G. and van Suchtelen J. Magnetoelectricity in Piezoelectric-magnetostrictive Composites // Ferroelectrics. – 1976. – V. 10. – P. 295–299.

49 Newnham R. E., Skinner D. P and Cross. L. E. Connectivity and Piezoelectric-Pyroelectric Composites // Mat. Res. Bull. – 1978. – V. 13. – P. 525–536.

50 Harshe G., Dougherty J.O., and Newnham R. E.. Theoretical Modelling of Multilayer Magnetoelectric Composites // Int. J. Appl. Electromagn. Mater. – 1993. – V. 4. – P. 145–159.

51 Harshe G. R. Magnetoelectric Effect in Piezoelectric-Magnetostrictive Composites: Ph. D. Thesis / The Pennsylvania State University, 1991. – 273 p.

52 Van den Boomgaard J., Terrell D. R., Born R. A. J. and Giller H. F. J. I. An In Situ Grown Eutectic Magnetoelectric Composite Material // J. Mater. Sci. – 1974. – V. 9. – P. 1705–1710.

53 Harshe G., Dougherty J. P., and Newnham R. E. Theoretical Modelling of 3-0.0-3 MagnetoelectricComposites // Int. J. Appl. Electromagn. Mater. – 1993. – V. 4. – P. 161–171

54 Zhai Jun Yi, Cai Ning, Liu Li, Lin Yuan Hua, Nan Ce Wen. Dielectric behavior and magnetoelectric properties of lead zirconate

titanate/Co-ferrite particulate composites // Mater. Sci. Engineering. – 2003. – V. B99. – P. 329–331.

55. Zh.Zhang et al., Phys. Rev. Lett. **103**, 187204 (2009).

56. S.Okada, A.Oshiyama, Phys. Rev. Lett. **87**, 146803 (2001).

57. J.Fernández-Rossier, Phys. Rev. B **77**, 075430 (2008).

58 Бичурин М. И., Петров В.М. и др. Магнитоэлектрические материалы: особенности технологии и перспективы применения // Сегнетомагнитные вещества. – М. : Наука, 1990. – С. 118–133.

59 Бичурин М. И., Петров В. М. Магнитоэлектрические материалы на сверхвысоких частотах / НовГУ им. Ярослава Мудрого. – Новгород, 1998. – 154 с.

60 Newton. Principia. – livre II. – 1686.

61 Kelvin. Popular Lectures. – livre 1. – 1831.

62 Rutherford. Proc. Roy. Soc. – Edinburgh, 42. – 345. (1943-1949).

63 Янке Е., Эмде Ф., Леш Ф. Специальные функции. – М. : Наука, 1977. – 342 с.

64 Бриллюэн Л., Пародии Н. Распространение волн в периодических структурах. – М. : И. Л. 1959. – 452 с.

65 Mathieu E. L. // Y de Math (2). – 1868. – Т.13. – P.137.

66 Бреховских Л. М. Волны в слоистых средах. – М. : Наука, 1973. – 343 с.

67 Завадский В. Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. – М. : Наука, 1972. – 558 с.

68 Козлов И. П. Нормальное падение плоской электромагнитной волны на плоскостойкий диэлектрик // Вестн. Москов. Авиаци. ин-та. – 1997. – 4 серия, № 2. – С. 37–41.

69 Фо Тхи Нгуен Ханг, Барковский Л. М. Группа вращения $SO(3, C)$ в задачах отражения света кристаллами // Опт. и спек. – 1989. – N3. – С. 639–652.

70 Garcia-Molina R., Ruis J., Chicon R. Reflection of electromagnetic waves from rough waveguides. // IEEE. Trans. – 1990. – N4. – P. 445–448.

71 Костюрин Н. А., Клиничик Г. С. Матрицы отражения и пропускания света на границе раздела двух анизотропных сред. // Кристаллография. – 1989. – 34, N5. – С. 167–171.

72 Петрашень Г. И. Распространение волн в упругих анизотропных средах. – Л. : Наука, 1980. – 280 с.

73 Федоров Ф. И. Теория упругих волн в кристаллах. – М. : Наука, 1965. – 386 с.

74 Федоров Ф. И. Теория гиротропии. – Минск. : Наука и техника, 1976. – 455 с.

75 Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. Метод эталонных задач. – Москва, 1973. – 456 с.

76 Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы теории дифракции и распространения волн. – Рязань, 1975. – 75 с.

77 Жерняк Т. Ф. К задаче рассеяния упругих волн в пространственно-неоднородной среде // Геология и геофизика, 1976. – №5. – С. 105–106.

78 Левин В. М. О распространении упругих волн в средах, армированных непрерывными волокнами. Исследования по механическим строительным конструкциям и материалам. – Ленинград, 1985. – 38 с.

79 Партон В. З. и др. Метод осреднения в механике неоднородных материалов регулярной структуры // Заводская Лаб, 1989. – №7. – С. 62–66.

80 Thomson W. T. Transmission of elastic waves through a stratified solid material. *ИИ Sound Vibr*, 1965. – N2. – P. 210–226.

81 Haskell N. A. The dispersion of surface waves on multilayered media. // *Bul. Seism. Soc. Am*, 1953. – P. 17–34.

82 Бреховских Л. М. Гончаров В.В. Введение в механику сплошных сред. – М. : Наука, 1982. – 335 с.

83 Kennet B. L. N. *Seismic waves propagation in stratified media*. Cambridge, 1983. – P. 342–356.

84 Ержанов Ж. С., Жубаев Н. Ж., Тлеуменов С. К. Сейсмические волны в неоднородной среде. – Алма-ата : Наука, 1985. – 176 с.

85 Ержанов Ж. С., Жубаев Н. Ж., Тлеуменов С. К. К исследованию цилиндрических волн на разрезах с вязким трением // Изв. АН КазССР, сер. физ-мат, 1980 – №1. – С. 32–37.

86 Ержанов Ж. С., Жубаев Н. Ж., Тлеуменов С. К. Распространение SH-волн в периодически неоднородных средах // Тезисы докладов Всесоюзного симпозиума – Бакуриани, 1982.

87 Ержанов Ж. С., Жубаев Н. Ж., Тлеуменов С. К. О распространении упругих волн в периодически неоднородных структурах с нежестким контактом // Тезисы докладов Всесоюзной конференции по распространению упругих и упругопластичных волн. Часть 2 – Фрунзе, 1983.

88 Erzanov Zh. S., Zhubaev N.Zh., Tleukenov S.K. *Sesmic waves in an inhomogeneous Medium* // *Gerlands Beitr. Geophysik*. – Leipzig, 1985. – №1. – P. 45–51.

89 Жубаев Н. Ж., Тлеукунов С. К. Неоднородные сейсмические волны в зонах тектонических разломов // Тезисы докладов Всесоюзной конф. – Фрунзе, 1981.

90 Жубаев Н. Ж., Тлеукунов С. К. Периодическая неоднородность и особенности распространения волн // Прогноз землетрясений. – Душанбе, 1982. – № 2. – С. 57–64.

91 Тлеукунов С. К. О поглощении энергии и разрыве смещений на границах с нежестким контактом // Математические вопросы теории распространения волн // Зап. Научн. Сем ЛОМИ АН СССР, 1983. – Т. 128 – С. 166–171

92 Тлеукунов С. К. Об определении полей волн в слоисто-неоднородной среде при существовании точек поворота. В кн.: Механика тектонических процессов. – Алма-ата : Наука, 1983. – С. 105–114.

93 Тлеукунов С. К. Распространение волн при наличии слоев с непрерывными изменениями параметров среды. – М., 1981. – С. 166–71.

94 Тлеукунов С. К. К теории распространения сейсмических волн через тектонический разлом. 4.2. – М., 1981. – С. 108–118.

95 Тлеукунов С. К., Оспан А. Т. Изучение электромагнитных полей в анизотропных средах. – Алматы, КазНПУ им. Абая, 2001. – 67 с.

96 Тлеукунов С. К. Метод матрицанта. – Павлодар : НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. – 148 с.

97 Тлеукунов С. К., Рахимова Ш. Н. Построение систем уравнений 1-го порядка для пьезоупругих волн в анизотропной среде ромбической сингонии класса 222 // Материалы науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «II Сатпаевские чтения». – Павлодар, 2002. – Т. 2. – С. 114–121.

98 Рахимова Ш. Н., Прудникова А. А., Агафонова А. В. Распространение пьезоупругих волн в анизотропных кристаллических средах // Материалы респуб. науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «IV Сатпаевские чтения». – Павлодар, 2004. – Т. 11. – С. 199–204.

99 Рахимова Ш. Н. Распространение пьезоупругих волн в анизотропной среде тригональной сингонии класса 3m // Материалы респуб. науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «IV Сатпаевские чтения». – Павлодар, 2004. – Т. 6. – С. 121–126.

100 Тлеукунов С. К., Альгожина А. А., Ботаева А. С. О взаимной трансформации электромагнитных и упругих волн в анизотропных антиферромагнетиках MnF_2 , CoF_2 магнитного класса $D_{2k}(D_{4k})$ //

Материалы междунар. науч. конф. «Первые Ержановские чтения». – Павлодар, 2004. – Т. 2. – С. 304–309.

101 Тлеукенов С. К., Курманов А. А. Задача отражения и преломления электромагнитных волн анизотропным слоем // Материалы междунар. науч. конф. «Первые Ержановские чтения». – Павлодар, 2004. Т. 2. – С. 319–325.

102 Шакишева А. М. Собственные электромагнитные колебания слоя антиферромагнетика с магнитоэлектрическим эффектом // Материалы междунар. науч. конф. «Первые Ержановские чтения». – Павлодар, 2004. – Т.2. – С. 332–336.

103 Рахимова Ш. Н. Уравнения дисперсии пьезоупругих волн в однородном слое // Издние-Поиск, серия естественных и технических наук. – Алматы, 2005. – №2. – С. 294–298.

104 Тлеукенов С. К., Испулов Н. А., Сейтханова А. К. Аналитический вид уравнений дисперсии упругих волн в периодически неоднородной среде различных классов кристаллов // Вестник ПГУ / Серия Физико-математическая. – Павлодар, 2004. – № 3 – С. 19–26.

105 Тлеукенов С. К., Сейтханова А. К., Испулов Н. А. О структуре фундаментальных решений уравнений движения термоупругих волн в различных анизотропных средах // Материалы международной научной конференции «Первые Ержановские чтения». – Павлодар, 2004 –Т. 3. – С. 195–200.

106 Тлеукенов С. К., Испулов Н. А., Сейтханова А. К. О структуре матрицы коэффициентов термоупругих волн, распространяющихся в анизотропной среде тетрагональной сингонии класса 4 // Вестник КазНУ / Серия Механика. – Алматы, 2005. – № 1 – С. 125–128.

107 Тлеукенов С. К., Испулов Н. А. Анализ матриц коэффициентов волн в анизотропной среде ромбической сингонии при наличии термоупругого эффекта // Вестник ПГУ / Серия Физико-математическая. – Павлодар, 2004. – № 3 – С. 22–28.

108 Испулов Н. А. Об анализе матриц коэффициентов волн в кристаллах кубической сингонии при наличии термоупругого эффекта // Материалы республиканской науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «V Сатпаевские чтения». – Павлодар, 2005. – Т 16. – С. 69–73.

109 Тлеукенов С. К., Испулов Н. А., Сейтханова А. К. О приложении метода матрицанта к изучению распространения термоупругих волн в анизотропной среде моноклинной сингонии,

Журнал // «Вестник Инженерной академии» / Серия Прикладная математика и механика. – Алматы, 2005. – № 2 – С. 47–51.

110 Испулов Н. А. О дисперсионных соотношениях для периодических термоупругих и упругих сред различных классов кристаллов // Журнал «Поиск» / Серия Механика. – Алматы, 2005. – № 2 – С. 298–304.

111 Сейтханова А. К., Испулов Н. А. О матрицанте усредненных анизотропных термоупругих сред // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», КазНТУ им. К. Сатпаева. – Алматы, 16-19 июня 2005. – Т. 1. – С. 308–313.

112 Тлеукунов С. К., Билялова А. Б. Распространение пьезоупругих волн в анизотропных средах с магнитоэлектрическим эффектом // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения», КазНТУ им. К. Сатпаева. – Алматы, 16-19 июня 2005. – Т. 1. – С. 326–329.

113 Тлеукунов С. К., Зейтова Ш. С. Магнитэлектрлік эффектiсi бар анизотропты ортада магниттi-серпiмдi толқындардың таралуы // Материалы международной конференции «Актуальные проблемы механики и машиностроения». – КазНТУ им. К. Сатпаева. – Алматы, 16-19 июня 2005. – Т. 1. – С. 330–334.

114 Баяубаев Е. К. Уравнения дисперсии неоднородных пластин на неоднородном упругом основании, // Материалы республиканской науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «V Сатпаевские чтения». – Павлодар, 2005. – Т. 16. – С. 27–28.

115 Тлеукунов С. К., Баяубаев Е. К. Уравнение дисперсии изгибных волн // Материалы междунар. науч. конф. «Первые Ержановские чтения». – Павлодар, 2004. – Т. 3. – С. 134–135.

116 Байгонысов О., Тлеукунов С. К. О методе решения некоторых задач распространения упругих волн при наличии периодической неоднородности. – Ленинград : Зап. научн. сем. ЛОМИ АН СССР, 1985. – Т. 148. – С. 30–33.

117 Тлеукунов С. К. О характеристической матрице периодически неоднородного слоя. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. – Ленинград : Зап. научн. семин., ЛОМИ, 1987. – Т. 165. – С. 177–181.

118 Тлеукунов С. К. О расположении корней дисперсионного уравнения периодически неоднородного по глубине волновода. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. – Ленинград : Зап. научн. семин., ЛОМИ, 1988. – Т. 173. – С. 167–171.

119 Тлеуменов С. К. Об изгибных колебаниях периодической неоднородной ортотропной пластины. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. – Ленинград : Зап.научн.семина. ЛОМИ, 1989. – Т. 179 – С. 179–181.

120 Тлеуменов С. К. Об условиях контакта упругих сред с тонкой прослойкой. В кн.: Математические вопросы теории распространения волн. – Ленинград : Зап.научн.семина. – ЛОМИ АН СССР, № 8, 1988. – С. 163–166.

121 Tleykenov S. The structure of propagator matrix and its application in the case of the periodical inhomogeneous media. Abstr. Semin. on Earthquake processes and their consequences Seismological investigations. – 1989. – Kurukshetra, India. – P. 4.

122 Tleykenov S. Investigation of the thin layer influence of the boundary conditions. Abstracts “Seminar on earthquake processes and their consequences”. – Kurukshetra, India. – 1989.

123 Досанов Т. С., Альжанов А. Б. Построение структуры матрицы коэффициентов в случае распространения магнитоупругих волн в магнитоупорядоченном кубическом кристалле // Материалы междунар. науч. конф. «Первые Ержановские чтения». – Павлодар, 2004. – Т. 2. – С. 288–293.

124 Тлеуменов С. К., Жукенов М. Қ. Плазмадағы магнитогидродинамикалық сипаттауда матрицант тәсілін қолдану // Материалы междунар. науч. конф. «Первые Ержановские чтения». – Павлодар, 2004. – Т. 2. – С. 309–313.

125 Тлеуменов С. К. Распространение электроупругих волн в пьезодиэлектриках тетрагональной сингонии класса 422 вдоль оси Z // Материалы междунар. науч. конф. «Первые Ержановские чтения». – Павлодар, 2004. – Т. 3. – С. 325–331.

126 Тлеуменов С. К., Рахимова Ш. Н. Уравнения индикатрис скоростей пьезоупругих волн в анизотропной среде тетрагональной сингонии класса 42m // Материалы междунар. науч. конф. «Первые Ержановские чтения». – Павлодар, 2004. – Т. 3. – С. 200–205.

127 Испулов Н. А., Шарипова Л., Латенова Л. О построении системы дифференциальных уравнений 1 порядка и матриц коэффициентов упругих анизотропных сред тетрагональной и тригональной сингоний // Материалы республиканской науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «IV Сатпаевские чтения». – Павлодар, 2004. – С. 89–94.

128 Тлеуменов С. К., Бакова М. Т. Термосерпіді толқындардың гексагоналды сингониялы кристалдарда таралуын зерттеуге матрицант әдісін қолдануы туралы. // Материалы республиканской

науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «V Сатпаевские чтения». – Павлодар, 2005. – Т. 16. – С. 22–26.

129 Билялова А. Б. Распространение пьезоупругих волн в анизотропной среде ромбической сингонии класса $mm2$ // Материалы республиканской науч. конф. молодых ученых, студентов, школьников «V Сатпаевские чтения». – Павлодар, 2005. – Т. 16. – С. 35 – 40.

130 Рахимова Ш. Н. Распространение пьезоупругих волн в анизотропной среде тригональной сингонии класса 32 // Вестник ПГУ / Серия Физико–математическая – Павлодар, 2005. – № 1 – С. 96–101.

Приложение А (справочное)

Перечень условных обозначений

В настоящей монографии применяют следующие термины с соответствующими определениями, обозначениями и сокращениями:

\vec{E} – вектор напряженности электрического поля.

\vec{H} – вектор напряженности магнитного поля.

\vec{B} – вектор магнитной индукции.

\vec{D} – вектор электрического смещения.

$\hat{\sigma}_{ij}$ – тензор электропроводности.

F – свободная энергия.

ω – круговая частота.

k_x, k_y – компоненты волнового вектора.

$\hat{\epsilon}_{ij}$ – тензор диэлектрической проницаемости.

$\hat{\mu}_{ij}$ – тензор магнитной проницаемости.

α – магнитоэлектрическая восприимчивость.

B – матрица коэффициентов.

b_{ij} – элементы матрицы коэффициентов.

Матрицант T – есть нормированная матрица фундаментальных решений системы дифференциальных уравнений первого порядка

\hat{T}^{-1} – структура фундаментальных решений (обратный матрицант).

\hat{P} – полу сумма прямого и обратного матрицанта.

\hat{E} – единичная матрица.

$\tilde{p}_i, \tilde{p}_j, \tilde{p}_k$ – корни характеристического уравнения.

$\hat{T}_{\sigma\bar{n}\delta}$ – усредненный матрицант, матрицант однородной среды.

k, χ – волновые числа.

\vec{U}_p – поле падающих волн.

\vec{U}_R – поле отраженных волн.

\vec{U}_t – поле преломленных волн.

h – период неоднородности.

n – число периодов в слое.

T^n – матрицант периодически неоднородного слоя.

$P_n(p)$ – матричные полиномы Чебышева – Гегенбауэра.

Содержание

Введение	3
1 Обзор литературы. Научная новизна, цель, метод, объект и практическая значимость исследования	4
2 Распространение электромагнитных волн в анизотропной среде с магнитоэлектрическим эффектом	21
2.1 Симметрия кристаллов	21
2.2 Тензорные характеристики	25
2.3 Исходные соотношения и приведение их к системе уравнений в матричной форме	26
2.4 Структура матрицанта	32
2.5 Матрицант однородной анизотропной среды	42
3 Задача отражения и преломления электромагнитных волн на границе двух сред	45
3.1 Матричная форма граничных условий задач отражения и преломления электромагнитных волн	45
3.2 Коэффициенты отражения и преломления электромагнитных волн на границе изотропного диэлектрика и анизотропного диэлектрика с магнитоэлектрическим эффектом	46
3.3 Энергетические коэффициенты отражения и преломления	51
4 Численные расчеты плотности потоков энергии	59
4.1 Расчет плотности потоков энергии в случае падения на границу двух сред ТЕ волны	59
4.2 Расчет плотности потоков в случае падения на границу двух сред ТМ волны	77
Заключение	91
Литература	92
Приложение А	103

Утверждаю
Проректор по НРИИ
ПГУ имени С. Торайгырова
_____ Н. Т. Ержанов
_____ 2018 года

Автор Жукенов М. К.

Кафедра «Физика и приборостроение»

Распространение электромагнитных волн в анизотропных средах с
магнитоэлектрическим эффектом
Монография

Одобрено на заседании кафедры Физики и приборостроения
____ 20__ года Протокол № ____

Заведующий кафедрой _____ Т. С. Досанов

Одобрено советом факультета Физики, математики и
информационных технологий ____ 20__ года Протокол № ____

Рекомендовано Ученым советом Павлодарского
государственного университета имени С. Торайгырова ____ 20__
года Протокол № ____

СОГЛАСОВАНО

Декан ФФМиИТ _____ Н. А. Испулов ____ 20__ года

Нормоконтролер

ОАиМК _____ Г. С. Баяхметова ____ 20__ года

ОДОБРЕНО

Директор ДНИИ _____ А. Н. Бергузинов ____ 20__ года