



№66 2025

**Annali d'Italia**

ISSN 3572-2436

*Annali d'Italia (Italy's scientific journal) is a peer-reviewed European journal covering top themes and problems in various fields of science.*

*The journal offers authors the opportunity to make their research accessible to everyone, opening their work to a wider audience.*

**Chief editor:** Cecilia Di Giovanni

**Managing editor:** Giorgio Bini

- Hoch Andreas MD, Ph.D, Professor Department of Operative Surgery and Clinical Anatomy (Munich, Germany)
- Nelson Barnard Ph.D (Historical Sciences), Professor (Malmö, Sweden)
- Roberto Lucia Ph.D (Biological Sciences), Department Molecular Biology and Biotechnology (Florence, Italy)
- Havlíčková Tereza Ph.D (Technical Science), Professor, Faculty of Mechatronics and Interdisciplinary Engineering Studies (Liberec, Czech Republic)
- Testa Vito Ph.D, Professor, Department of Physical and Mathematical management methods (Rome, Italy)
- Koshelev Andrey Candidate of Philological Sciences, Associate Professor, Faculty of Philology and Journalism (Kiev, Ukraine)
- Nikonov Petr Doctor of Law, Professor, Department of Criminal Law (Moscow, Russia)
- Bonnet Nathalie Ph.D (Pedagogical Sciences), Faculty of Education and Psychology (Lille, France)
- Rubio David Ph.D, Professor, Department of Philosophy and History (Barcelona, Spain)
- Dziedzic Stanisław Ph.D, Professor, Faculty of Social Sciences (Warsaw, Poland)
- Hauer Bertold Ph.D (Economics), Professor, Department of Economics (Salzburg, Austria)
- Szczepańska Janina Ph.D, Department of Chemistry (Wrocław, Poland)
- Fomichev Vladimir Candidate of Pharmaceutical Sciences, Department of Clinical Pharmacy and Clinical Pharmacology (Vinnytsia, Ukraine)
- Tkachenko Oleg Doctor of Psychology, Associate Professor (Kiev, Ukraine)

and other experts

500 copies

Annali d'Italia

50134, Via Carlo Pisacane, 10, Florence, Italy

email: [info@anditalia.com](mailto:info@anditalia.com)

site: <https://www.anditalia.com/>

# CONTENT

## CULTURAL SCIENCES

*Dorofeeva T.*

ISLAM ON THE VIRTUES OF FRIDAY ..... 4

*Dorofeeva T.*

QUESTIONS OF MONOTHEISM IN ISLAM ..... 6

## EARTH SCIENCES

*Kirov B., Asenovski S., Georgieva K*

GEOEFFECTIVENESS OF DIFFERENT SOLAR

DRIVERS (CYCLES 22–25) ..... 8

## ECONOMIC SCIENCES

*Aliyev Isa Mahammad*

DIRECTIONS FOR IMPROVING COMPETITIVE  
STRATEGIES IN AZERBAIJAN'S LOGISTICS

SERVICES..... 19

*Mumtozaposho Kurbonova*

COMPARATIVE ANALYSIS BETWEEN ISLAMIC  
AND CONVENTIONAL BANKS CHARACTERISTICS'

IMPACT ON THEIR RISK-TAKING BEHAVIOUR .. 26

## MATHEMATICAL SCIENCES

*Kuralbaev Z.*

NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF  
THE CREEPING MOTION OF A VISCOUS  
LAYER ALONG THE SLOPE OF AN

ELEVATION..... 32

*Sevil Farrukh Ibrahimova*

LABOR TRAINING AND EDUCATION OF  
PRESCHOOL CHILDREN ESSENCE, PURPOSE  
AND OBJECTIVES .....

62

*Sadygov Misraddin Allahverdi oglu*

n-SUBDIFFERENTIABILITY OF n-CONVEX

FUNCTIONS..... 37

## PEDAGOGICAL SCIENCES

*Aytan Huseynova,*

*Minavvar Mammadova*

HOW TO TEACH SPEAKING: LINGUISTIC

KNOWLEDGE ..... 66

## PHILOLOGICAL SCIENCES

*Jabbarova Izzet Gulam qizi*

RESEARCH OF LEXICOGRAPHY ISSUES IN  
TURKOLOGY AND AZERBAIJAN

LINGUISTICS..... 68

*Saurbaev R. Zh., Zhumasheva A.Sh.,  
Zhetpisbay A.K., Omarov N.R.*

CONSTRUCTSEME AS A FACTOR EXPRESSING  
STRUCTURAL-SEMANTIC AND PREDICATIVE  
PROPERTIES OF SYNTACTICAL

CONSTRUCTION (BY THE MATERIAL OF THE  
ENGLISH LANGUAGE) ..... 80

*Yadigar Veli oglu Aliyev, Ramila Yusif  
kizi Suleymanova*

FEATURES OF THE STRUCTURE OF  
ASEMANTIC ROOT MORPHEMS (BY THE  
MATERIAL OF THE AZERBAIJANIAN

LANGUAGE) ..... 75

## PHYSICAL SCIENCES

*Aygün Sultanova Haji gizi*

DIGITAL TRANSFORMATION AND ARTIFICIAL

INTELLIGENCE..... 83

## **PSYCHOLOGICAL SCIENCES**

***Jafarova Lalazar***

METHODS FOR ELIMINATING SPEECH  
DISORDERS IN PRESCHOOL CHILDREN ..... 86

***Aygun Safarova Agamirza,***

***Gunesh Dashdemirov***

SOLUTION TO THE PROBLEM OF  
OPTIMIZATION OF A CATALYTIC REFORMING  
UNIT ..... 92

***Aygun Safarova Agamirza,***

***Maleyka Islmayilova***

DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL  
FOR GAS COMPRESSOR STATIONS ..... 94

## **TECHNICAL SCIENCES**

***Aygun Safarova Agamirza,***

***Nigar Islamzade***

THE PROBLEM OF IDENTIFICATION OF A  
VACUUM DISTILLATION COLUMN ..... 98

# CULTURAL SCIENCES

UDC 291.3

## ISLAM ON THE VIRTUES OF FRIDAY

**Tatyana Dorofeeva***Candidate of Philosophical Sciences, associate professor  
Penza State Agrarian University, Penza, Russia*

УДК 291.3

## ИСЛАМ О ДОСТОИНСТВАХ ПЯТНИЦЫ

**Татьяна Геннадьевна Дорофеева***Кандидат философских наук, доцент  
Пензенский государственный аграрный университет, г. Пенза, Россия*

### Abstract

The article is devoted to the topic «Sanctification of the days of the week in Islam». Based on the study of Muslim theological literature, the author reveals the significance of the days of the week in Islam. It is shown that any day of the week of a believer should be dedicated to finding the satisfaction of the Almighty. On all days of the week, Muslims are required to engage in godly activities. But Islam attaches special importance to Juma (Friday), the day of common prayer in the mosque. In Islam, it is believed that Allah's punishment increases for sins committed on this day, and the reward increases for a righteous life.

### Аннотация

Статья посвящена теме «Освящение дней недели в исламе». Автор на основе изучения мусульманской богословской литературы раскрывает значение дней недели в исламе. Показывает, что любой день недели верующего должен быть посвящен обретению довольства Всевышнего. Во все дни недели мусульмане обязаны заниматься богоугодной деятельностью. Но особое значение в исламе придается Джуме (пятнице) – дню общей молитвы в мечети. В исламе считается, что за грехи совершенные в этот день увеличивается наказание Аллахом, а за праведную жизнь приумножается награда.

**Keywords:** Allah, Islam, Quran, Muhammad, week, Friday, man.**Ключевые слова:** Аллах, ислам, Коран, Мухаммед, неделя, пятница, человек.

По учению ислама, вся жизнь человека и время его жизни, измеряемое годами, месяцами, неделями, днями и часами, является возможностью для поклонения и обретения довольства Всевышнего.

В исламе указывается – нельзя забывать, что каждый новый день – это благословение и подарок Всевышнего, и мусульмане должны посвятить его Аллаху. Каждый день хороший, но некоторые дни таят в себе больше благословений для верующих[5].

Самым главным и важным днем недели для мусульман объявлена пятница – Джума – в переводе с арабского – день собрания. Пророк Мухаммед отмечал: «Пятница является лучшим из дней, в которые восходило солнце» [4].

В учении ислама пятница признается как лучший день из всех дней после дня стояния на горе Арафат (один из этапов хаджа). Совершение грехов в пятницу считается пренебрежением к этому священному дню, поэтому в нем многократно увеличивается наказание за грехи, но большей будет и награда за благие дела в этот день [5].

Это день, когда местная община собирается вместе, чтобы укрепить узы братства и просить прощения и благословения у Аллаха. Проповедь (вааз), произнесенная перед молитвой, дает верующим духовное руководство, знания и наставления [3].

Джума-намаз – это совместная молитва под руководством имама. «О, верующие! Когда призывают [азаном] на намаз в пятницу, то устремитесь к поминанию Аллаха [к совершению пятничного намаза] и оставьте торговлю [и все прочие дела]. Это лучше для вас [чем прибыль от торговли], если бы вы только знали [какое благо в намазе, то непременно отдали бы предпочтение вечному]» (Коран, 62:9). Следовательно, через данный аят Всевышний указывает мусульманам, что пятничный намаз есть прямая обязанность всех мусульман. Тем не менее, есть категории лиц, для которых данная молитва не обязательна (они также могут не присутствовать на праздничных молитвах во время двух главных праздников ислама – Ураза-Байрам и Курбан-Байрам):

- женщины, которым такие намазы дозволено совершать дома в индивидуальном порядке;
- несовершеннолетние, то есть дети, не достигшие полового созревания;
- путники, которыми по шариату признаются люди, отделившиеся от дома на расстояние более 87 км и на срок не более 15 суток;
- недееспособные – как физически, так и душевно больные люди.

Перед тем, как отправиться на Джума в мечеть, верующему необходимо совершить следующие действия:

- совершить полное омовение (гусль). Мухаммед наставлял: «Тот из вас, кто приходит на пятничную молитву, пусть совершает полное омовение» [3];

- надеть свою лучшую одежду. Пророк говорил: «Каждому, помимо своей рабочей и повседневной одежды, необходимо иметь чистые одеяния, предназначенные для пятничной молитвы» [3];

- смазаться благовониями. Мухаммед поучал: «Тому, кто в пятницу совершит полное омовение, умастит благовониями... это станет искуплением грехов, совершенных им между этой и предыдущей пятницей» [3];

- воспользоваться мисваком (щеткой из ветвей и корней дерева арак). Мухаммед указывал: «Если бы это не было обременительно, то я бы повелел чистить зубы перед каждой молитвой» [3];

- по мере возможности добираться до мечети пешком. В хадисе сказано: «Аллах сделал запретными для Адского огня ноги тех людей, у кого они покрываются пылью на пути Господа» [3];

- прийти в мечеть необходимо заблаговременно. Мухаммед отмечал: «С наступлением пятничного дня у дверей каждой мечети появляются ангелы, которые записывают каждого, кто заходит в мечеть. Человек, который придет в мечеть заблаговременно, подобен тому, кто принесет в жертву Всевышнему верблюда... Когда же к верующим выходит имам, то ангелы сворачивают свои свитки и входят внутрь» [3].

В исламе достоинства пятницы определяются следующим образом:

- в пятницу прощаются грехи, совершенные в течение недели;

- джума-намаз уберегает от огня ада;

- в этот день Всевышний принимает все мольбы мусульман;

- Джума – праздник для верующих;

- в пятницу наступит Судный день;

- того кто умер в пятницу минуют мучения в могиле;

- это день, когда Адам вошел в райские сады, день, когда он был изгнан из него, а также день его смерти;

- «Пятница – день бракосочетания», так как в этот день вступили многие пророки, в том числе и Мухаммед с двумя женами – Хадижей и Айшей;

Пятничный намаз совещается в соборной Джума-мечете – одном из видов мечетей. Как правило, соборная мечеть – одно из самых величественных сооружений в поселении. Наряду с соборной мечетью в исламе существуют:

- мечети для ежедневной молитвы жителей определенного квартала и свершения обрядов, связанных с жизненным циклом человека – квартальные мечети;

- мечети для совершения намаза в праздничные дни Курбан-байрам и Ураза-байрам – намазгох-мечети;

- мечети при мавзолеях, медресе и ханаках.

В комплексе мечети различают: водохранилище для омовений, молельный зал, зал для духов-

ной власти и женщин. Во внутреннем убранстве мечети наиболее выделяются михраб – ниша указывающая направление на Мекку и минбар – кафедра трибуна для имама.

Вернемся к характеристике других дней недели в исламе, по определению пророка Мухаммеда:

- *суббота* считается днем предательства;

- *воскресенье* – это день когда Всевышний стал творить, поэтому в этот день мусульманам рекомендуется посадка деревьев и строительство дома;

- *понедельник* признается днем путешествий и торговли; в этот день мусульманам рекомендован пост, так как в понедельник родился пророк Мухаммед;

- *вторник* назван «днем крови», ибо в этот день совершено много кровавых событий, описанных в Коране и Сунне;

- *среда* определена двояко: «день несчастий» и «положительный день для начинаний». Современные богословы считают, что несчастным днем является тот, в который мусульманин совершил грех, а хорошим – любой день, когда правоправный совершает богоугодные дела [1].

Мнения о среде как о положительном дне [2]:

- дело, начатое в среду, непременно будет доведено до конца. В связи с этим рекомендуется изучение наук в этот день;

- мольба, прочитанная в среду после обеда до наступления времени предзакатного намаза, принимается;

- *четверг* считается хорошим днем для посещения различных чиновников.

Итак, в исламе дается характеристика всем дням недели, при этом лучшим днем недели определяется пятница, хотя богоугодные дела правоправным нужно совершать в любой день недели.

## Литература

1. День отдыха у мусульман [Электронный ресурс]. URL: <https://mebstroy.com/sovety/den-otdyha-u-musulman.html> (дата обращения 14.01.2025).

2. Об особенностях дней недели [Электронный ресурс]. URL: <https://islam-dag.ru/vse-ob-islame/25663?ysclid=m5jib92fn220049293> (дата обращения 24.01.2025).

3. Почему пятница благословенный день для мусульман? [Электронный ресурс]. URL: <https://m.islam-today.ru/veroucenie/pocemu-patnica-blagoslovennyj-den-dla-musulman/?ysclid=m6dfzsgxp525379233> (дата обращения 10.01.2025).

4. Почему пятница лучший день недели [Электронный ресурс]. URL: <https://islam.global/veroucenie/adaby/pocemu-pyatnitsa-luchshiy-den-nedeli/> (дата обращения 18.01.2025).

5. Что в исламе значит каждый день недели? [Электронный ресурс]. URL: <https://m.islam-today.ru/veroucenie/cto-v-islame-znait-kazdyj-den-nedeli/?ysclid=-m6df7dajvf63363146> (дата обращения 10.01.2025).

## QUESTIONS OF MONOTHEISM IN ISLAM

Tatyana Dorofeeva

*Candidate of Philosophical Sciences, associate professor  
Penza State Agrarian University, Penza, Russia*

УДК 282

## ВОПРОСЫ МОНОТЕИЗМА В ИСЛАМЕ

Татьяна Геннадьевна Дорофеева

*Кандидат философских наук, доцент  
Пензенский государственный аграрный университет, г. Пенза, Россия***Abstract**

The article is devoted to the topic «Monotheism in Islam». Based on the analysis of Muslim theological literature, the author characterizes the concepts of «tawhid», «shirk», «kufr», «guluu». It shows that the Prophet Muhammad pointed out the path of the Muslim community to strict monotheism, a path that determines human well-being in earthly life and bliss in ahirat.

**Аннотация**

Статья посвящена теме «Монотеизм в исламе». Автор на основе анализа мусульманской богословской литературы характеризует понятия «таухид», «ширк», «куфр», «гулюу». Показывает, что пророк Мухаммед указал путь мусульманской общины к строгому монотеизму – путь, который предопределяет благополучие человека в земной жизни и блаженство в ахирате.

**Keywords:** Allah, Islam, polytheism, monotheism, Muhammad, disbelief, worship, excess.

**Ключевые слова:** Аллах, ислам, многобожие, монотеизм, Мухаммед, неверие, поклонение, чрезмерность.

Монотеизм в исламе обозначается термином «таухид». Понимание монотеизма в исламе выражено в формуле Шахада (первом столпе ислама), которая свидетельствует, что кроме Аллаха нет других богов. Мусульмане убеждены, что только Аллах:

- единственный Господь;
- достоин поклонения;
- имеет божественные имена и атрибуты (сифаты).

В связи с этим мусульманские богословы выводят понятия:

- единобожие в господстве (таухид ар-рубубийя);
- единобожие в божественности (таухид аль-улюхийя);
- единобожие в обладании божественными именами и атрибутами (таухид аль-асма ва ас-сыфат) [2]. Каждое определение имеет подтверждение в Коране и Сунне.
- Мусульманские ученые отмечают, что есть люди, которые отступают от истины касательно этого вопроса и определяют три варианта отклонения:
  - отсутствие веры во владычество Аллаха или неверие в его существование;
  - отрицание отдельных уникальных черт Всевышнего и отрицание некоторых проявлений Его господства;
  - приписывание некоторых особенностей Господа кому-либо, кроме Аллаха [1].

В контексте ислама вера в Аллаха приносит пользу человеку, как в этом мире, так и в вечной жизни:

- дает благословение и проживание в изобилии;
- спасает от всякого зла;
- наполняет жизнь смыслом;
- очищает сердце от суеверий;
- приносит вечное блаженство в ахирате [4].

В исламе поднимается вопрос о том, что такое многобожие, неверие и каковы их виды.

Многобожие в исламе обозначается термином «ширк», что подразумевает:

- приписывание качеств Аллаха как Господа созданиям;
- приобщение сотоварищей к Аллаху в обладании божественными именами и атрибутами;
- поклонение кому-либо кроме Аллаха.

Ширк считается самым страшным грехом человека, имеющим ужасающие последствия для человека, как в этой жизни, так и загробной.

Согласно исламскому учению, многобожие является:

- единственным грехом, который не прощается без покаяния в нем;
- величайшей несправедливостью;
- принижением достоинств Аллаха;
- причиной вечных мук в Аду.

Многобожие делает бесплодными все деяния человека [8].

В исламе различают великое и малое многобожие. Когда кого-либо или нечто приравнивают к Аллаху – это великое многобожие. Коран свидетельствует, что пребывая в огне, язычники будут говорить своим богам: «Клянемся Аллахом, мы ведь явно заблуждались, когда равняли вас с Господом миров!» (Коран, 26:97-98).

К малому многобожию относится все, что совершается не ради Аллаха, а для людей; различные клятвы (матерью, детьми, хлебом); ношение различных талисманов и амулетов.

Неверие именуется в исламе – куфр – отсутствие веры в Аллаха и Его посланника Мухаммеда. Куфр как и ширк, бывает великим и малым. За великое неверие – человека навечно ждет Ад, а за малое неверие он только наказывается [5].

В исламе отмечается, что пророк Мухаммед сделал все, чтобы мусульманская община была последовательницей монотеизма и воздерживалась от всего, что противоположно ему. Можно искать заступничества Аллаха только тем путем, который указан в шариате. Так, посланник Аллаха запретил носить амулеты, кольца, нити, испрашивать благодать у деревьев, камней и других предметов [3]. Также под запретом находятся:

- мольбы к мертвым с просьбой о спасении, удовлетворении нужд, избавлении от печали и т.п.;
- культовые действия около могил и мавзолеев;
- надежда на высокое положение пророков в деле своего приближения к Аллаху [6].

Ислам стоит на позиции запрета чрезмерности (гулюу) в поклонении. В Коране написано: «О люди Писания! Не проявляйте чрезмерности в вашей религии и говорите об Аллахе только правду» (Коран, 4:171); «Скажи: «О люди Писания! Не излишествуйте в своей религии вопреки истине и не потакайте желаниям людей, которые еще раньше впали в заблуждение, ввели в заблуждение многих других и сбились с прямого пути» (Коран, 5:77). Посланник Аллаха предупреждал: «Остерегайтесь чрезмерности, ибо именно чрезмерность в религии погубила ваших предшественников» [7].

Таким образом, в исламе в рассмотрении вопроса о монотеизме (таухид), богословы поднимают вопросы, связанные с многобожием (ширк), неверием (куфр), чрезмерностью (гулюу).

## Литература

1. В чем проявляется уклонение от единобожия в господстве. Аллах [Электронный ресурс]. URL: [https://vuzlit.com/781210/proyavlyaetsya-\\_uklonenie\\_edinoboz-hiya\\_gos-podstve?ysclid=m6nfdqz79896400020](https://vuzlit.com/781210/proyavlyaetsya-_uklonenie_edinoboz-hiya_gos-podstve?ysclid=m6nfdqz79896400020) (дата обращения 15.01.2025).
2. Единобожие как суть веры в Аллаха [Электронный ресурс]. URL: [https://toislam.ws/aqidah/edinobozhie\\_kak\\_sut\\_v\\_ery\\_v\\_allaha?ysclid=m6dlh9ye2d208639760](https://toislam.ws/aqidah/edinobozhie_kak_sut_v_ery_v_allaha?ysclid=m6dlh9ye2d208639760) (дата обращения 13.01.2025).
3. Испрашивание благодати [Электронный ресурс]. URL: <https://musl-im.jofo.me/2009192-baraka-i-tabarruk-blagodat-i-puti-ee-dostijeniya-k-is-lamu.html?-ysclid=m6ngq0t7bt561744764> (дата обращения 16.01.2025).
4. Какое влияние оказывает на человека вера в Аллаха [Электронный ресурс]. URL: <https://m.islam-today.ru/veroucenie/kakoe-vlianie-na-celoveka-okazyvaet-vera-v-allaha/?ysclid=m6nek3ed76512086543> (дата обращения 6.01.2025).
5. Куфр (неверие). Виды куфра [Электронный ресурс]. URL: <https://vislame.blog/kufr-neverie-vidy-kufra/?ysclid=m6ng9wa7vn275744688> (дата обращения 18.01.2025).
6. Поиск близости к Аллаху [Электронный ресурс]. URL: <https://che-rnovik.net/content/monotheos/tavassul-poisk-blizosti-k-al-lahu?ysclid=m6nght1b3n-19-8078896> (дата обращения 12.01.2025).
7. Чрезмерность в исламе [Электронный ресурс]. URL: <https://dumrf.ru/is-lam/theology/8232?ysclid=m6nggqwepm502350536> (дата обращения 14.01.2025).
8. Ширк в исламе [Электронный ресурс]. URL: <https://medinaschool.org/library/creed/grehi/shirk-v-islame> (дата обращения 12.01.2025).

# EARTH SCIENCES

## GEOEFFECTIVENESS OF DIFFERENT SOLAR DRIVERS (CYCLES 22–25)

**Kirov B.**

*Professor, Space Research and Technologies Institute – Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria.*

**Asenovski S.**

*Ass. Professor, Space Research and Technologies Institute – Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria.*

**Georgieva K**

*Professor, Space Research and Technologies Institute – Bulgarian Academy of Sciences, Sofia, Bulgaria.*

### Abstract

We investigate the geoeffectiveness of three primary types of solar wind structures: high-speed streams from coronal holes (HSS/CIR), coronal mass ejections (CMEs) exhibiting a magnetic cloud (MC) structure, and CMEs without a clear flux-rope signature (non-MC CMEs). We analyze data spanning four solar cycles (22–25) to examine each driver's occurrence frequency, typical solar wind parameters (speed and magnetic field), and resulting effects on the global geomagnetic indices Kp and Dst. The results confirm that MC-type CMEs are the most efficient producers of intense storms ( $Dst \leq -100$  nT) due to prolonged intervals of southward magnetic fields. However, in weaker solar cycles (e.g., cycle 24), the average intensity and geoeffectiveness of MC events decline, reducing the overall contribution of CME-driven storms. In contrast, HSS/CIR events tend to induce moderate geomagnetic storms ( $Dst$  in the  $-50$  to  $-80$  nT range) coupled with elevated Kp for several consecutive days. These streams become the dominant source of geomagnetic activity during the declining phase of the solar cycle, when persistent coronal holes remain active while strong CMEs become less frequent. Preliminary data from the rising phase of cycle 25 already suggest a rebound in CME geoeffectiveness compared to the unusually weak cycle 24. These findings underscore the importance of accounting for solar cycle phase in space weather forecasting, as different solar drivers dominate at different times and affect Earth's magnetosphere in distinct ways.

**Keywords:** geoeffectiveness, solar wind, coronal mass ejections (CME), magnetic clouds (MC), high-speed streams (HSS), coronal holes, CIR (corotating interaction region), Dst index, Kp index, solar cycles 22–25, space weather

### Introduction

Geomagnetic disturbances at Earth are driven primarily by three types of solar wind structures: [1] **high-speed solar wind streams (HSS)** from coronal holes, often preceded by co-rotating interaction regions (CIRs); [2] **magnetic cloud (MC)** type coronal mass ejections (CMEs), which are interplanetary flux ropes with smoothly rotating, enhanced magnetic fields; and [3] **non-magnetic-cloud CMEs** (non-MC CMEs), referring to other CMEs or ejecta that lack the clear flux-rope signature. The **geoeffectiveness** of a solar driver refers to its ability to generate geomagnetic activity, typically measured by indices like the Kp (3-hour range index) and Dst (hourly disturbance storm time index). Past studies established that magnetic clouds are on average the most geoeffective of these drivers, while HSS/CIR events have moderate but sustained effects, and non-MC ejecta tend to be less geoeffective **per event**. However, the relative impact of these drivers varies with the solar cycle phase and over different solar cycles. Long-term observations have shown that geomagnetic activity does not always scale directly with sunspot numbers, due in part to the changing prevalence of HSS vs. CME drivers over the cycle. For example, during solar maximum years, CMEs (especially MCs) are frequent and often dominate geomagnetic storm activity, whereas during the declining phase and solar minimum, long-lived coronal holes produce re-

current HSS that drive a secondary peak in geomagnetic activity. This can reduce the correlation between sunspot count and geomagnetic indices in certain cycles. Solar cycles 22 through 24 exhibited such trends: cycle 23 (1996–2008) notably had a strong late-cycle contribution from HSS, and cycle 24 (2009–2019) – a weaker sunspot cycle – saw an even greater relative role of HSS/CIR-driven storms. Solar cycle 25 began in late 2019 and is now in its rising phase; it provides an opportunity to examine whether these trends continue, especially as early observations already show significant geomagnetic storms in 2023. In this paper, we update and expand the analysis of Kirov *et al.* [1] on the geoeffectiveness of different solar wind drivers by incorporating new data and results covering solar cycles 22, 23, 24, and the beginning of cycle 25. We compare HSS, MCs, and non-MC CME events in terms of their occurrence frequency, typical solar wind parameters, and geoeffectiveness as measured by Kp and Dst. We also investigate how their geoeffectiveness varies with the phase of the solar cycle (rising, maximum, declining, minimum) and discuss notable changes in geomagnetic activity patterns from cycle to cycle. By leveraging updated observations (OMNI solar wind data, geomagnetic indices from WDC Kyoto and NOAA, and published event catalogs), as well as recent studies, we aim to provide a comprehensive, up-to-date picture of how each type of solar driver contributes to geomagnetic activity across multiple solar cycles.



## Data and Methods

**Data Sources:** We use **in situ solar wind and geomagnetic index data** primarily from the OMNIWeb database (OMNI hourly and daily data), which inter-calibrates measurements from WIND, ACE, DSCOVR and other spacecraft near 1 AU. Geomagnetic activity is quantified using the global **Dst index** (measuring the symmetric ring current intensity) and the mid-latitude **Kp index** (a quasi-logarithmic index of auroral zone activity). For historical context, we include data from 1986 through early 2025, covering solar cycle 22 (1986–1996), cycle 23 (1996–2008), cycle 24 (2009–2019), and the rise of cycle 25 (2020–2024). For each geomagnetic storm (conventionally  $Dst \leq -50$  nT for moderate storms), we identify the driving solar wind structure using published catalogs and event lists.

**Event Classification:** We classify interplanetary CMEs (ICMEs) and HSS/CIR events as follows:

- **Magnetic Cloud (MC) ICMEs:** We identify MCs based on the classic criteria of enhanced magnetic field strength, low plasma beta, and smooth rotation of the magnetic field direction over a period  $\sim 1$  day. Our primary source is the ICME catalog of Richardson and Cane [3] (updated through 2019) and WIND magnetic cloud lists [4], supplemented by recent lists for cycle 24 and 25 events [5]. MC classification in these catalogs relies on in situ measurements at 1 AU; roughly 30–50% of ICMEs are tagged as MCs depending on solar cycle phase. Near solar minimum, a higher fraction of ICMEs appear as MCs (flux-rope structure clearly observed), whereas at solar maximum many ICMEs are complex or disturbed, thus a smaller proportion are classical MCs.

- **Non-Magnetic-Cloud CMEs (non-MC CMEs):** This category includes ICMEs that lack a clear flux-rope signature in situ (sometimes called “ejecta” or “complex ejecta”). These were identified as ICME events in the catalogs but not classified as magnetic clouds. They often have more irregular magnetic field profiles. We also include here CME-driven sheath regions (the compressed solar wind ahead of fast ICMEs) if a geomagnetic storm is predominantly caused by the sheath’s shock-compressed southward fields. In our analysis, storms caused by an ICME’s sheath preceding the ejecta are counted under CME-driven activity (since without the CME there would be no shock). When needed, we distinguish between sheath effects and the ICME flux-rope proper.

- **High-Speed Streams (HSS) and CIRs:** HSS events are identified by a sustained elevation of solar wind speed (typically  $> \sim 500$  km/s) usually originating from coronal holes. At 1 AU, an HSS is often preceded by a co-rotating interaction region (CIR) where the fast wind interfaces with slower wind ahead, causing compressed plasma and enhanced magnetic fields (sometimes with an embedded shock if the speed gradient is large). We use the CIR/HSS event lists compiled by Jian *et al.* [5] (available for 1995–present) and updates by Y. Chi and co-workers for cycle 24. Approximately 866 HSS/CIR events were catalogued from 1995–2016 by Chi *et al.* [6], and we extend this through the late declining phase of cycle 24 using OMNI data (noting prominent HSS events up to 2019). For earlier cycles

(e.g. 22), we rely on identification of major coronal holes in NOAA solar wind reports and prior studies [7]

We associate each geomagnetic storm with the driver that predominantly caused its main phase drop in Dst, following criteria similar to Shen *et al.* [8] and Chi *et al.* [6]. For example, if an ICME is present and its magnetic structure produces the Dst minimum, the storm is classified as CME-driven (MC or non-MC as appropriate). If no ICME is present and a CIR is observed with elevated speed and oscillatory southward fields, the storm is classified as HSS-driven. In cases of compound events (e.g. an ICME overtaking a CIR), we note combined influences but generally attribute the storm to the structure causing the peak magnetic disturbance. We divide the timeline into **solar cycle phases**: rising phase (from minimum up to the solar maximum year), solar maximum (around the peak sunspot year  $\pm 1$  year), declining phase (post-maximum years leading toward the next minimum), and solar minimum (the solar minimum year and immediate low-activity years around it). This allows us to compare geoeffectiveness during different phases of activity.

**Analysis Methods:** For each driver category, we calculate metrics of geoeffectiveness including: (a) the **probability of a geomagnetic storm** given an event (e.g. what fraction of MCs cause at least a moderate storm, what fraction cause intense storms), (b) the distribution of **storm intensity** (Dst minimum and peak Kp) for those events, and (c) the **average and cumulative impact** on geomagnetic activity (for example, how much each driver contributes to the total annual Ap index or number of storm days in each cycle). We use the **Dst index** to measure storm intensity (with thresholds like  $Dst \leq -50$  nT for moderate storms,  $\leq -100$  nT for intense storms, and  $\leq -200$  nT for major “superstorms”) and the **Kp index** to gauge broader activity including substorms and auroral disturbances. To illustrate typical solar wind conditions, we examine the peak **solar wind speed (V)** and **interplanetary magnetic field (IMF) strength (|B|)** within each event, as these are key factors in geoeffectiveness (fast speeds and strong southward Bz usually yield stronger storms via the **VxBz** electric field term). Uncertainties in classifying some events are acknowledged – for instance, an ICME and CIR arriving concurrently can complicate attribution. However, such cases are relatively few. We have cross-checked storm identifications with multiple sources (event catalogs and published case studies) to ensure robust classification. The results are presented in aggregated form (e.g. averages over many events) to highlight general patterns rather than specifics of any single event.

## Results

### Occurrence Frequency and Cycle Phase Distribution

#### Solar Cycle Variation in Driver Occurrence:

The occurrence of HSS/CIR events and CME events varies systematically over the solar cycle. As expected, CMEs (including both MC and non-MC types) are most frequent during solar maximum years, tracking the sunspot cycle. Magnetic cloud ICMEs in particular do **not** show a simple solar-cycle dependence in raw counts – a roughly similar number of MCs can occur even in a

weaker cycle – but the overall ICME rate follows the sunspot number. In contrast, high-speed stream occurrence is *enhanced during the declining phase* of each cycle. Figure 1 illustrates this pattern for cycles 23 and 24. In cycle 23, as the Sun moved past its peak (2000) into the decline (2003–2005), recurrent coronal holes produced a growing number of HSS events, leading to a secondary geomagnetic activity peak around 2003. Cycle 24, which had a relatively low sunspot peak (2014), saw an even larger relative presence of HSS: the year **2016 (declining phase of cycle 24)** recorded the highest annual count of stream interaction events in two decades. This confirms earlier findings (e.g. by Tsurutani *et al.* [7]) that HSS/CIR occurrences **peak in the late decline** of solar cycles. Around solar minima, the HSS frequency drops (polar coronal holes dominate, but their streams often miss Earth's equator), and CME rates are also at their lowest.

**Relative Contributions to Storms:** An important consequence of the above is that the **relative contribution of HSS vs. CMEs to geomagnetic storms changes with cycle phase and from cycle to cycle**. During solar maxima, the majority of geomagnetic storms (especially intense storms) are caused by CMEs/ICMEs, whereas during minima and early rising phases, storms (if any) are mostly due to HSS or co-rotating streams. During declining phases, HSS and CMEs can contribute more comparably. A striking example is the weak Solar Cycle 24: we find that **nearly**

**half of all storms in cycle 24 were driven by HSS/CIRs**, a much higher fraction than in the preceding cycle. In **cycle 23** (a stronger cycle), roughly 79% of moderate storms were CME-associated and ~21% were due to HSS. In **cycle 24**, CME-driven storms dropped to ~51%, and HSS/CIR-driven storms rose to ~49%. This is illustrated in **Figure 1**, which compares the storm driver fractions for the two cycles. The data underscore that cycle 24's geomagnetic activity was unusually dominated by recurrent streams (open flux regions), reflecting the sun's weaker output of fast, geoeffective CMEs in that cycle. By contrast, cycle 23 and earlier cycles had a more CME-dominated geomagnetic record (though even cycle 23 showed a notable HSS contribution in its latter half). Many moderate storms (Kp 5–7, Dst in –50 to –100 nT range) cluster in these declining years. In fact, Chi *et al.* [6] report that **about 70% of SIR/HSS events in their study period that caused storms did so during the descending phase** of the solar cycle. Finally, around **solar minimum** itself, geomagnetic activity is at its quietest: the few CMEs that occur are often slow, and while coronal holes can produce recurrent activity, their impact is milder (e.g. mostly Kp 3–5 range disturbances). For example, the late decline and minimum of cycle 23 (2006–2008) had very few storms; those that did occur were associated with either small transient ICMEs or CIRs from low-latitude coronal holes, all with Dst not lower than about –60 nT.

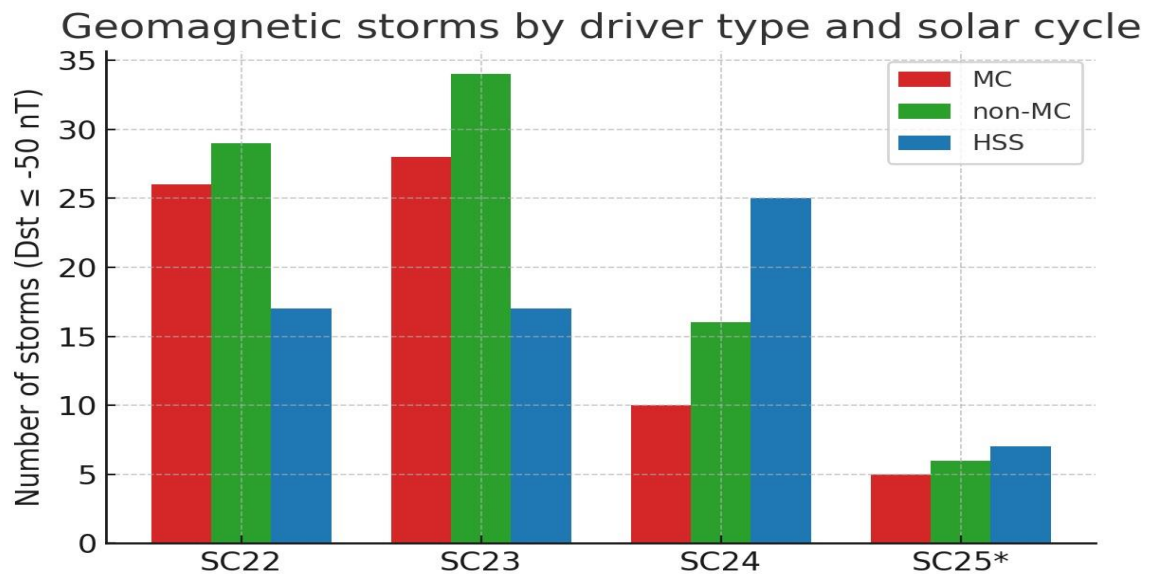


Figure 1: Number of geomagnetic storms ( $Dst \leq -50$  nT) in each solar cycle (22–25), categorized by driver: magnetic cloud (MC) CMEs, non-MC CMEs, and high-speed streams (HSS). Solar Cycle 23 (1996–2008) had the most storms overall, heavily dominated by CME-driven events (red + green bars). Cycle 22 (1986–1996) was similarly CME-dominated at peak, though its declining phase saw some HSS contribution). In contrast, Cycle 24 (2009–2019) had a much larger HSS share – nearly half of its 50 moderate storms were due to HSS (blue) – reflecting the unusually weak solar activity and prevalence of coronal holes in that cycle. Cycle 25 (2019–2025, partial data) is still in its rising phase and has produced relatively few storms so far, mostly from ICMEs

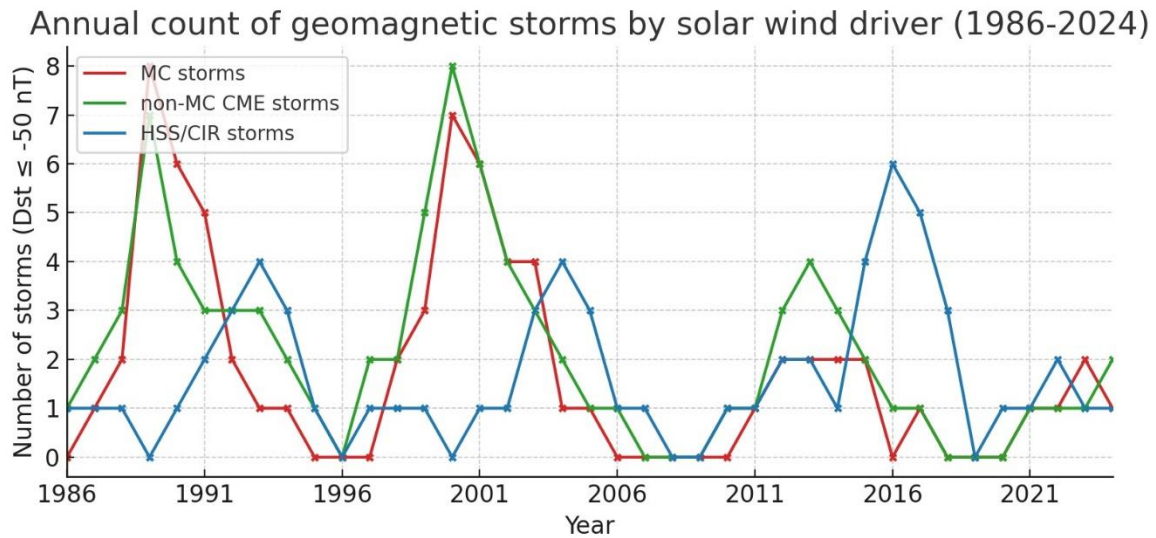


Figure 2: Annual number of geomagnetic storms ( $Dst \leq -50$  nT) attributed to each driver from 1986 through 2024. This timeline highlights the evolution of geomagnetic activity within and between cycles. CME-induced storms (MC and non-MC combined) peak during solar maximum years (e.g. 1989, 2000–2001, 2014), whereas HSS-induced storms surge during declining phases. For instance, a secondary “recurrent” peak is evident around 2003, when frequent HSS/CIR events from persistent coronal holes caused numerous moderate storms. A similar HSS upturn occurred in 2016–2017 (decline of Cycle 24) – 2016 had one of the highest counts of HSS-driven storms in recent decades. By contrast, geomagnetic activity nearly vanishes at solar minima (1995–1996, 2007–2008, 2018–2019), with at most one or two minor storms. This figure supports the view that double-peaked geomagnetic activity can occur: one peak at solar maximum (CME-driven) and another late in the cycle (HSS-driven).

### Solar Wind Speed and IMF Intensity for Each Driver

**Typical Solar Wind Conditions:** The geoeffectiveness of a solar wind driver strongly depends on its speed and magnetic field properties, especially the southward IMF component **B<sub>z</sub>**. Figure 2 summarizes the typical **peak solar wind speed** and **IMF strength** associated with each driver type at 1 AU, based on statistical surveys

- **Magnetic Cloud CMEs:** MC events typically have **strong magnetic fields** – peak field magnitudes are often 15–20 nT, with some exceeding 20 nT at 1 AU. The magnetic field within MCs rotates smoothly, and in ~85% of MCs a southward component appears at some point, often reaching –10 to –30 nT or more. Indeed, the *strongest* southward IMF observed in the solar wind is usually within MCs or their sheaths; MCs contributed southward up to ~50 nT in the last two decades. MC speeds can vary – many MCs travel at **moderate speeds** (400–600 km/s) by the time they reach Earth, especially if they are older or have expanded, but fast MCs (often those driving a shock) can still arrive at 700–800+ km/s. On average, MC speeds tend to be in the 500 km/s range in recent cycles, with higher speeds typically occurring during solar maximum and early decline when CMEs from active regions are most energetic.

- **non-MC CMEs:** ICMEs without clear magnetic cloud structure generally have **weaker magnetic fields** than MCs. Their peak IMF might be on the order of ~8–12 nT, unless a strong shock compression is present. These ejecta often lack a long-duration coherent southward field – their **B<sub>z</sub>** may fluctuate or only briefly

turn south. In terms of speed, non-MC CMEs cover a wide range. Many are the slower, less energetic eruptions (350–500 km/s at 1 AU). However, this category also includes some fast events that, due to interactions or internal complexity, do not manifest as clean flux ropes. Those can drive strong shocks. Statistically, the **average speed** of non-MC ICMEs is slightly lower than that of MCs (perhaps ~450 km/s vs ~500 km/s in cycle 23–24 data), and fewer of them have upstream shocks. Peak speeds for the fastest CME-driven shocks (often associated with large flares) can exceed 1000 km/s at Earth, but those cases often do contain magnetic clouds (e.g. the Halloween 2003 CMEs). In our context, the non-MC CME events contributing to storms often had peak speeds ~400–600 km/s and IMF ~5–15 nT with variable orientation.

- **HSS/CIR Streams:** High-speed streams from coronal holes are characterized by **very fast plasma flows** and relatively lower magnetic field strengths. At 1 AU, HSS flows commonly reach **700–800 km/s** from large polar coronal holes extending to low latitudes, and occasionally up to ~800+ km/s for the most extended holes. The leading edge of an HSS forms a CIR with compressed plasma and fields; the **IMF strength in CIRs** typically peaks around 10–15 nT at most, lower than typical CME shocks. Within the fast stream itself, the magnetic field is more fluctuating but generally ~5–8 nT. Crucially, the *orientation* of HSS/CIR fields often alternates (due to Alfvénic waves co-rotating with the stream), causing intermittent southward **B<sub>z</sub>**. This means HSS-driven storms usually result from a series of substorm intensifications rather than one continuous injection. The **oscillatory southward B<sub>z</sub>** in

CIRs is less efficient at driving very low Dst, but it can sustain activity for several days. As a result, **HSS events rarely produce extreme Dst values** – the compressed CIR field might drive Dst to  $-50$  or  $-80$  nT in moderate storms, but  $\text{Dst} < -100$  nT intense storms

from pure HSS are uncommon (only). The HSS themselves maintain elevated Kp (4–6) for extended periods due to ongoing auroral activity, even as Dst gradually recovers.

Typical solar wind parameters for different drivers

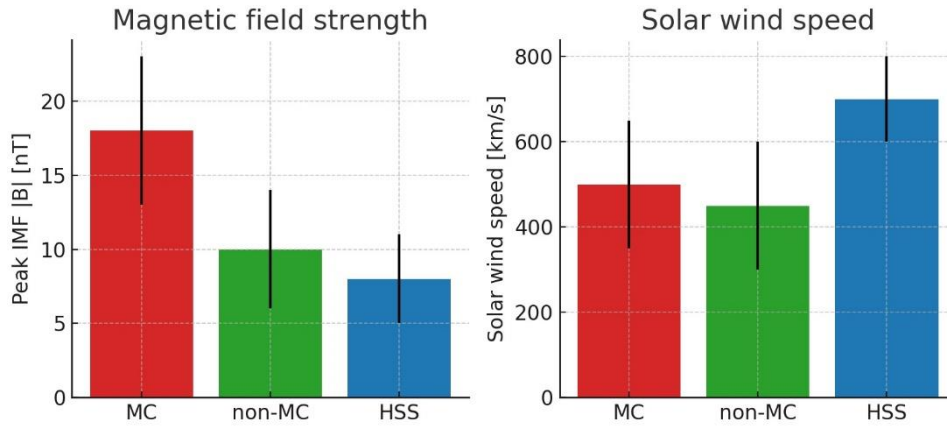


Figure 3: Characteristic peak solar wind parameters for the three driver types, based on statistical surveys. Left: Typical peak magnetic field strength  $|B|$  inside the driver structure at 1AU. Magnetic-cloud CMEs have the strongest fields, often peaking around 15–20 nT (with some exceeding 20 nT). Non-MC CME ejecta have more moderate peak fields ( $\sim 8$ –12 nT), unless a strong shock compresses the field. HSS/CIR streams exhibit the weakest peak fields ( $\sim 5$ –10 nT in compressed CIR regions), with  $\sim 5$ –8 nT typical in the HSS proper. Right: Typical solar wind speed of each driver near Earth. HSS events reach the highest speeds (often 600–800 km/s from large coronal holes). MC ejecta travel at moderate speeds,  $\sim 500$  km/s on average by 1 AU (though fast CMEs can still exceed 700 km/s). Non-MC CMEs are often slower (300–500 km/s), although a few fast eruptions without clear flux ropes can surpass 800 km/s. These solar-wind properties explain each driver’s geoeffectiveness: fast speeds and strong southward  $B$  in MCs yield intense storms, whereas HSS produce longer-lasting but milder disturbances due to their high speed coupled with weaker, fluctuating fields.

### Geoeffectiveness Metrics: Kp and Dst Response

**Storm Probability and Intensity:** Consistent with earlier findings, we find that **magnetic cloud CMEs are the most likely to cause significant geomagnetic storms**. By examining ICME events from 1995–2020, roughly 70–80% of MCs are associated with at least a moderate storm ( $\text{Dst} \leq -50$  nT), and over half produce an intense storm ( $\text{Dst} \leq -100$  nT). In contrast, **non-MC ejecta** have a lower geoeffectiveness: on the order of 40–50% lead to  $\text{Dst} \leq -50$  nT storms. In the statistical study of Shen *et al.* [8] 74% of MC events caused storms versus 48% of non-MC ICMEs over 1995–2014, confirming that the presence of a magnetic cloud structure greatly increases the probability of a geoeffective southward [9] occurring. This is because MCs often contain an extended southward field interval as part of their rotation, whereas non-cloud ejecta might only have brief or weak southward fields. Our results support this: nearly every intense storm ( $\text{Dst} < -100$  nT) in our dataset had an ICME driver, usually an MC or a shock/sheath preceding an ejecta. HSS events, while numerous, seldom produce Dst below  $-100$  nT on their own. They do, however, produce plenty of moderate storms: about **52% of CIR/HSS events cause at least a minor storm** ( $\text{Dst} \leq -30$  nT) in one 22-year survey. Many of those are weak-to-moderate storms ( $\text{Dst} -30$  to  $-80$  nT) which still register as Kp 5–7 events. **Geomagnetic Index Response – Kp vs Dst:** The nature of the geomagnetic response differs between drivers:

**MC-driven storms** tend to have **low Dst and high Kp**, characteristic of classical intense geomagnetic storms. A southward-pointing MC flux rope can induce a strong ring current injection, driving Dst sharply negative (often  $< -100$  nT). Kp will typically reach 7–8 (G3–G4 storm levels) during the main phase due to widespread auroral activity. However, MC-driven storms are usually relatively short-lived in their peak intensity – the main phase may last only 6–12 hours as the Earth traverses the southward portion of the cloud. If the MC’s southward field is long-lasting (e.g. an extended SN-type cloud where the front half is southward), the storm can be long and severe. For example, the “Halloween” storms of 29–30 October 2003 ( $\text{Dst} \sim -370$  nT) and the St. Patrick’s Day 2015 storm ( $\text{Dst} \sim -223$  nT) were caused by MCs with strong southward fields persisting for many hours. Notably, **about 80% of the most severe storms ( $\text{Dst} < -200$  nT) are associated with MC events** (often including their sheath). These storms show a sharp Dst drop and typically Kp = 8–9 for one or two 3-hour intervals.

• **Non-MC CME storms** generally have **milder Dst** than MC storms, on average. They often result in Dst minima in the  $-50$  to  $-100$  nT range (moderate to low-end intense storms). Kp can still reach 7–8 if there is a shock/sheath causing strong auroral activity. For instance, a CME ejecta with a fluctuating southward field might produce a Kp=7 storm but only drive Dst to  $-60$  nT if the southward intervals are short. There are cases where a non-MC ejecta caused an intense storm, especially if aided by a preceding shock: the storm of



August 2018 ( $Dst \approx -175$  nT) was caused by a complex ejecta with strong sheath fields. But such cases are fewer. On average, **non-MC CME storms are less intense** than MC-driven ones. Their  $Dst$  profile may also be multi-step if the sheath and ejecta each contribute (e.g. an initial impulse from the shock, followed by a smaller dip from the ejecta).  $K_p$  in these storms can be elevated for longer than MC-only storms if the sheath turbulence keeps auroral activity going.

- **HSS-driven activity** is often characterized by **prolonged elevated  $K_p$  with modest  $Dst$  depression**. When a fast stream arrives, the associated CIR can cause a sudden impulse and a minor storm ( $Dst$  perhaps  $-50$  to  $-80$  nT). After that, as the high-speed flow continues, the magnetosphere is hit by a continuous series of Alfvénic fluctuations. These drive **recurrent substorms** (enhancing the auroral electrojet indices and  $K_p$ ) but also intermittently feed the ring current. Instead of one sharp  $Dst$  drop, HSS storms often show a **gradual, sawtooth-like  $Dst$  variation**, sometimes hovering in the  $-20$  to  $-50$  nT range for several days.  $K_p$ , meanwhile, can remain elevated (e.g.  $K_p = 5$  for multiple 3-h periods, occasionally reaching 6–7 during the strongest surges) over 2–3 days. This can result in significant **cumulative geomagnetic activity** (integrated index sums, which matter for, say, radiation belt enhancements and ionospheric disturbances) even though the peak  $Dst$  is not extreme. As an example, in late August 2018, a coronal hole HSS produced  $K_p$  5–6 activity for about 3 days, yet  $Dst$  never dropped below  $-50$  nT (a moderate storm). Because of the oscillatory north-south IMF, **HSS-driven storms rarely achieve the coherent southward  $B_z$  needed for a deep  $Dst$** . Only when a fast stream interacts with another structure (like a preceding CME or another stream) might  $Dst$  reach intense-storm levels. Our analysis corroborates that **pure HSS events have a very low likelihood of superstorms** (none observed in cycles 23–24), whereas they account for the bulk of **recurrent moderate storms** especially during declining phases.

#### Solar Cycle and Phase Dependence of Geoeffectiveness

**Solar Cycle 22 (1986–1996):** Cycle 22 was a high solar activity period with a large number of CMEs during its peak (1989–1991). This cycle produced some of the most significant magnetic cloud events on record (e.g. the March 1989 CME that caused the  $-589$  nT Montreal storm). Virtually all *great* storms ( $Dst < -300$  nT) in cycle 22 were due to fast CMEs/MCs. The declining phase in the early 1990s saw increased geomagnetic activity from HSS as well – studies noted a strong 27-day recurrent signal in geomagnetic indices around 1993–1994 attributable to coronal hole streams (the aa index had a secondary peak then). Overall, MC geoeffectiveness in cycle 22 was high at solar maximum (numerous intense storms in 1989–1991), then tapered off as sunspots declined, while HSS took over as a steady driver of moderate activity in the early 90s. By the 1994–1996 minimum, geomagnetic activity reached very low levels (only occasional CIR-led substorms).

**Solar Cycle 23 (1996–2008):** Cycle 23 started quiet but produced intense storm activity around its

maximum (1999–2001) and again a secondary “geomagnetic plateau” in 2003. The average geoeffectiveness of MCs in cycle 23 was substantial – many MCs led to storms, and several to major storms [10]. For example, **74% of MCs in 1995–2005 caused storms** in one analysis, reflecting the high geoeffectiveness of flux ropes. A famous pair of events, the October–November 2003 “Halloween storms,” demonstrated extreme geoeffectiveness: a fast MC with strong southward  $B_z$  produced one of the largest  $Dst$  disturbances on record (two storms with  $Dst \sim -300$  and  $-370$  nT). These occurred in the *declining phase* (late 2003) when large active regions were still producing CMEs – highlighting that intense MC storms can occur even as sunspots wane. At the same time, cycle 23’s decline featured prominent HSS activity. 2003–2005 had continuous streams that caused many moderate storms ( $Dst -50$  to  $-100$  nT range) and kept the  $A_p$  index elevated. It was noted that starting in 2003, the correlation between sunspot number and geomagnetic indices weakened, as geomagnetic activity remained high despite falling sunspots, due to HSS contributions. Statistical studies confirm that during cycle 23’s **descending phase, HSS/CIR events were a major contributor** to storm-level activity (e.g. about one-third of cycle 23 storms were associated with CIRs). By solar minimum ( $\sim 2007$ –2008), geomagnetic activity again quieted; the few MCs around the minimum had low geoeffectiveness (small eruptions), consistent with Kirov *et al.*’s [1] finding that MC geoeffectiveness is low near sunspot minima.

**Solar Cycle 24 (2009–2019):** Cycle 24 was an anomalously weak cycle (sunspot peak  $\sim 116$  in 2014 vs  $\sim 180$  in cycle 23). Despite a similar count of ICMEs and MCs compared to the previous cycle, their geoeffectiveness was markedly lower. **Geomagnetic storm activity dropped:** the number of intense storms ( $Dst \leq -100$  nT) in cycle 24 was about 80% less than in cycle 23. Only a handful of  $Dst < -100$  nT events occurred from 2009–2019, and none exceeded  $-250$  nT. Our results and others (e.g. Gopalswamy *et al.* [11]) indicate this was directly due to weaker solar wind drivers: CMEs in cycle 24 had **lower speeds and weaker magnetic fields on average**, yielding smaller VBz coupling. Figure 1 already showed that HSS/CIRs contributed nearly half the storms in cycle 24, a reflection of CME weakness. Indeed, **the average  $Dst$  impact per MC in cycle 24 was only about  $-23$  nT (cloud portion)**, compared to  $-55$  nT in cycle 23. This dramatic drop is attributed to a  $\sim 50\%$  reduction in the product of speed and southward  $B_z$  in MCs. In physical terms, cycle 24 CMEs had lower magnetic field strengths (partly due to reduced solar polar fields and open flux), and many expanded more before reaching Earth, reducing their density and pressure. The *strongest storm of cycle 24* was the St. Patrick’s Day event on 17 March 2015 ( $Dst \approx -223$  nT,  $K_p = 8+$ ), caused by a shock-sheath and MC combination. Most other cycle 24 storms were much weaker. On the other hand, coronal holes in cycle 24’s declining phase (2015–2018) were well-developed and persistent, causing a string of recurrent moderate storms. For example, during 2016–2017, at least 5 distinct HSS episodes each caused  $K_p$  7 (G3) storms with

Dst around  $-50$  to  $-100$  nT. These contributed to an elevated geomagnetic baseline even as sunspot numbers were very low. The net effect was that by cycle 24's end, the long-term correlation between sunspot activity and geomagnetic activity had further decreased (continuing the trend noted by Kirov *et al.*) because geomagnetic disturbances were maintained by HSS streams rather than sunspot-driven CMEs. In summary, cycle 24 underscored that **weak solar cycles can still produce geomagnetic activity via HSS**, but the largest storms will be much less frequent due to the paucity of fast, intense CMEs. **Solar Cycle 25 (2020–present):** Cycle 25 is still in progress (as of early 2025, it is in the rising phase toward an expected maximum around 2025). Early indications suggest cycle 25 may be somewhat stronger than cycle 24. By 2022–2023, sunspot numbers were ramping up and so were Earth-directed CMEs. Importantly, **cycle 25 has already produced a storm comparable to the biggest events of cycle 24.**

In late April 2023, an ICME impact generated a storm with  $\text{Dst} \approx -213$  nT (provisional), which is on par with the March 2015 storm. This April 2023 event, as well as several other  $< -100$  nT storms in 2021–2023, were all caused by ICMEs (often with clear magnetic cloud signatures). This suggests that cycle 25's CMEs are regaining geoeffectiveness. Correspondingly, we anticipate that the coming solar maximum of cycle 25 will continue to produce predominantly CME-driven storms (with potentially larger Dst excursions than seen in cycle 24). Later in the cycle, HSS from any long-lived coronal holes will likely contribute additional moderate storms. The STCE/SIDC notes expect that by the declining phase of cycle 25, co-rotating streams will again “stir” intense geomagnetic storms, although probably not as strong as the biggest CME storms. Thus, the general paradigm holds: ICMEs cause the largest storms, while CIR/HSS events extend the activity during quieter solar phases.

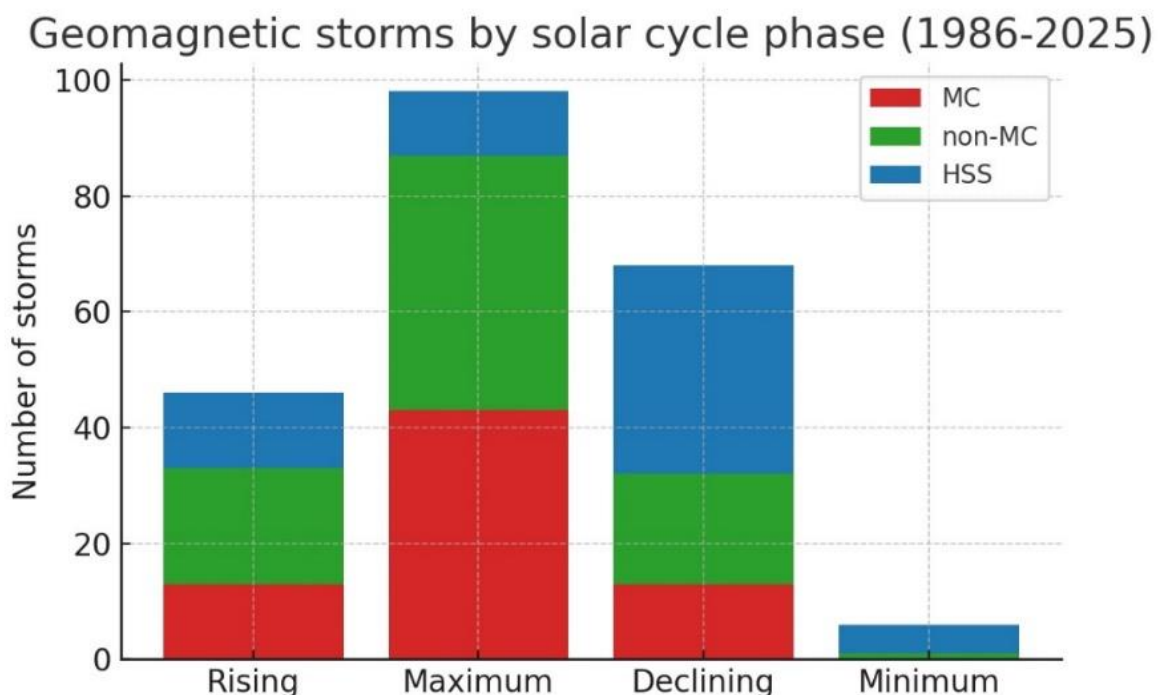


Figure 4: Distribution of geomagnetic storms ( $\text{Dst} \leq -50$  nT) by phase of the solar cycle, partitioned by driver type. Each bar shows the total number of storms occurring during all **rising, maximum, declining, or minimum** phase years of cycles 22–25 (1986–2025). During **solar maxima**, storms are overwhelmingly CME-driven (red+green segments), with few HSS events. In **declining phases**, long-lived coronal holes cause a large fraction of storms (blue), nearly rivaling CMEs. Indeed,  $\sim 50\%$  of storms in decline phases were HSS-induced in our dataset, consistent with studies showing HSS occurrence peaks late in the cycle. **Early rising and solar minimum** phases produce the fewest storms; those that do occur are mostly from HSS/CIRs (e.g. occasional moderate storms from remnant coronal holes in early rise or near minimum). Virtually no intense storms originate at solar minima, since CME activity is minimal and high-latitude coronal holes cause only weak equatorial disturbances. This phase-dependent pattern illustrates why geomagnetic activity does not strictly follow sunspot cycles – CME storms dominate at peaks, but HSS storms maintain activity late in the cycle.

In summary, across cycles 22–25, **magnetic clouds have consistently been the most geoeffective drivers on a per-event basis**, especially for intense storms, but their absolute impact depends on solar cycle conditions (strong in cycles 22–23, weaker in cycle 24). **High-speed streams are less potent per event** but can become the dominant source of activity during low sunspot periods, contributing a high cumulative geomagnetic effect (numerous days of moderately disturbed

conditions). The **phase of the solar cycle** critically influences which driver dominates: CME/MC effects peak at solar maxima (and can still produce major storms in early decline), whereas HSS effects peak in late decline/minimum, as illustrated by the alternating dominance in cycle 23 vs 24 (Figure 1).

#### Discussion

Our updated analysis reinforces and expands upon earlier understandings of solar wind drivers and geomagnetic activity. We discuss below the implications for each driver type, the solar-cycle dependence, and physical causes behind the observed trends:

**Why are Magnetic Cloud CMEs so geoeffective?** Magnetic clouds provide the “perfect storm” conditions for Earth’s magnetosphere: a strong, long-duration southward magnetic field embedded in a plasma cloud. The high geoeffectiveness of MCs is chiefly due to their tendency to contain extended southward IMF intervals (often 6–12 hours or more), which efficiently drive magnetic reconnection at the dayside magnetopause. This leads to substantial energy transfer into the magnetosphere, fueling the ring current and auroral substorms. MCs have a higher probability of containing such large southward **B<sub>z</sub>** than other structures. Even though MCs constitute only a fraction of all ICMEs, they disproportionately produce intense storms. Yermolaev *et al.* [12] pointed out that while CIRs and sheaths occur more frequently, MCs – when they do occur – are more **efficient** at storm generation due to their magnetic configuration. One interesting observation is that MC geoeffectiveness appears to **vary with the solar cycle’s magnetic polarity** and global field configuration. For example, Wu *et al.* [14] found differences in geoeffectiveness between MCs with southward-leading vs northward-leading fields, tied to the solar magnetic cycle phase. In our context, near solar minima, most ICMEs are MCs, but they tend to be smaller and slower (often originating from decaying active regions or filament eruptions). As a result, their geoeffectiveness is lower – consistent with our finding that around sunspot minima, even though almost every ICME might be an MC, major storms are rare. During solar maxima, many MCs originate from powerful eruptions and thus carry stronger fields and higher speeds, yielding greater impact. The **declining phase** has a mix: some of the largest MCs (e.g. late-cycle active region eruptions in 2003, 2012, 2023) occur then, but overall MC occurrence drops. The polarity flip of the heliospheric field around solar maximum can also influence the occurrence of certain MC types (SN vs NS), potentially affecting whether their leading or trailing portion is southward. These nuances aside, the fundamental reason MCs top geoeffectiveness rankings is their magnetic structure – a well-organized flux rope is more likely to present a sustained southward field to Earth than the fleeting, patchy southward fields in non-MC ejecta or CIRs.

#### **Non-MC CMEs and their lower efficiency:**

Non-flux-rope ejecta present a more complex or fragmented magnetic structure to Earth. Many are likely CME remnants that underwent interactions en route (two CMEs merging, or erosion by reconnection with the solar wind field), which can disrupt the coherent field. The result is often a shorter-duration or weaker southward **B<sub>z</sub>**. Our results show less than half of such ICMEs cause even moderate storms, affirming their lower geoeffectiveness. However, it is important to note they still contribute significantly to geomagnetic activity due to their greater numbers. For example, in cycle 23 about 56% of ICME-driven storms were from

non-MC ejecta (**the rest from MCs**). These events often cause **multi-step storms**: the shock/sheath may trigger a sudden impulse and minor storm, and if the ejecta has a southward portion, it causes a second dip in Dst. The combined effect can occasionally be as large as a single MC. One well-known phenomenon is the **sheath-enhanced storm**, where the shock and sheath ahead of a fast CME contribute more to Dst than the CME’s flux rope itself. Non-MC CMEs are also more prone to **interactions with HSS**. A common scenario in declining phases is a slow ICME followed by a fast stream – the CIR compresses the ICME from behind, boosting its field strength. Such ICME–SIR interactions can enhance geoeffectiveness beyond what either would do alone. This was seen in some storms of 2018 and 2021, where a CIR amplified the fields in a preceding ejecta, producing an unexpectedly strong storm. For space weather forecasting, this means non-MC CMEs shouldn’t be discounted – while individually weaker on average, under the right conditions (shock compression, interaction), they can still drive intense disturbances. Nonetheless, the forecast challenge is greater because without the clear flux rope signature, it is harder to predict the magnetic orientation (and thus geoeffectiveness) of these ejecta in advance.

#### **High-Speed Streams and cumulative effects:**

High-speed streams illustrate the difference between **peak intensity** and **cumulative impact** on geomagnetic activity. A single HSS may only cause a moderate storm by Dst standards, but the **persistence** of activity over several days can have substantial space weather consequences. For instance, extended high-Kp periods due to HSS lead to **radiation belt enhancements** (accelerating electrons to relativistic energies) and **geomagnetically induced currents (GICs)** from long-lasting substorms, which can stress power grids over time. The Space Weather community notes that **recurrent moderate storms from HSS can be as troublesome as occasional intense CME storms**, especially for satellite operations (due to energetic particle environments and surface charging). Our findings that over half of CIRs cause at least minor storms and about one-third cause Dst < –50 nT storms means that during a typical declining-phase year, one can expect many “storm-level” disturbances even in the absence of big CMEs. Chi *et al.* (2018) identified 60 SIR–ICME interaction events from 1995–2016, of which 49 caused geomagnetic storms – further highlighting that interactions can blur the line, but also that SIRs alone accounted for 16 intense storms in that period. We also saw that HSS effects were especially dominant in cycle 24’s low solar activity environment. The reasons HSS are **less geoeffective per event** – highly fluctuating B<sub>z</sub>, and typically lower peak field strength – are well established. Additionally, HSS-induced storms tend to **saturate** at moderate levels because once the ring current is enhanced to a certain degree, continuing oscillatory driving doesn’t deepen it much further (instead, the storm may oscillate near a quasi-steady state). Interestingly, one physical factor behind the increase of HSS/CIR geoeffectiveness in recent cycles could be the Sun’s changing magnetic configuration. Kirov *et al.* [1] postulated that the long-term rise in the second (HSS-

driven) peak of geomagnetic activity each cycle was related to an increasing tilt of the heliospheric current sheet and more extensive low-latitude open flux. The weak polar fields in cycle 24 indeed allowed sizable coronal holes at mid-latitudes, which might be part of that trend. In cycle 25, as polar fields are recovering, we may see a slight reduction in HSS prevalence compared to cycle 24 – though it is too early to confirm.

**Implications for solar-terrestrial coupling:** The results across cycles 22–25 highlight that the Sun can produce geomagnetic storms through multiple pathways. Even during periods of low sunspot count (and hence few CMEs), the solar wind is not quiescent – coronal holes provide a steady source of disturbances. This has important implications for long-term space climate: for example, during the Maunder Minimum-like conditions, geomagnetic activity likely doesn't drop to zero, as recurrent streams from whatever small coronal holes exist would still spark auroral activity (albeit at a lower level). Conversely, during grand solar maxima, one might expect extremely frequent CME-driven storms with shorter quiet interludes, but fewer recurrent moderate storms. Our comparison of cycle 23 and 24 serves as a case study in these dynamics. The fact that cycle 24's MCs were so weak relative to cycle 23's (Dst impact roughly half as much on average) directly ties to changes in the Sun's output. Gopalswamy *et al.* [11] attributed this to **reduced CME magnetic content and speed**, possibly due to lower magnetic pressure and a higher expansion rate in the corona for cycle-24 CMEs. Essentially, CMEs carried less punch at Earth. If cycle 25 turns out stronger, we may observe a rebound in CME geoeffectiveness (and early cycle 25 events like April 2023 support this [13]).

**Phase-dependent forecasting:** Our results strongly endorse a phase-dependent approach to space weather forecasting. During solar maximum, forecasters should focus on CME tracking and predicting ICME magnetic structures – the big risks are from magnetic cloud events producing superstorms. During declining phase, attention must shift also to coronal holes and CIRs – not because they'll produce the largest single storms, but because they will produce a sequence of disturbances that can have cumulative technological impacts (satellite anomalies, pipeline corrosion from repeated GICs, etc.). Additionally, the declining phase often features “high-speed stream-driven geomagnetic activity” which can mask or modulate the impact of any late-cycle CMEs. It's worth noting that some of the most challenging scenarios are **compound events** – e.g. a CME embedded in a CIR or back-to-back CMEs (like the two CMEs that caused the extreme March 2023 storm sequence). These can produce unexpected geoeffective enhancements. Our multi-cycle overview suggests that such compound events might be more common during the declining phase when different sources overlap. Meanwhile, at solar minimum, even a single modest CME can cause an outsized geomagnetic response relative to the quiet background (e.g. the quiet period of 1996 saw a –90 nT storm from a slow ICME simply because nothing else was happening then). Thus, forecasting efforts cannot neglect CMEs at solar minimum either, despite their rarity. Finally, the secular

decrease in sunspot-geomagnetic correlation noted by various authors appears to continue at least through cycle 24. If cycle 25 and 26 recover in amplitude, it will be interesting to see if this correlation increases again (meaning cycle 24 was an outlier), or if the geomagnetic response remains relatively strong compared to sunspots (implying a persistent higher role of HSS or other factors). One potential factor is the **interplanetary magnetic field (IMF) baseline**. Lockwood *et al.* [15] showed a doubling of the heliospheric IMF from 1900 to 2000, which could have made storms more common even for the same sunspot number. However, more recent data (cycle 24) showed a drop in IMF strength, aligning with the weak cycle. Continued monitoring of both open solar flux (which influences HSS) and total CME output is needed to understand these long-term trends.

### Conclusions

We have presented an updated analysis of the geoeffectiveness of three main solar wind drivers – high-speed streams, magnetic cloud CMEs, and non-magnetic-cloud CMEs – over solar cycles 22, 23, 24, and the start of 25. By incorporating modern data and recent research findings, we arrive at the following key conclusions:

- **Magnetic Cloud CMEs remain the most geoeffective drivers per event.** MC-type ICMEs have the highest probability of causing geomagnetic storms, and they are responsible for the majority of intense (Dst  $\leq -100$  nT) and extreme storms. Their average geoeffectiveness (storm-causing efficiency) is highest among solar wind structures. However, the geoeffectiveness of MCs is strongly **solar-cycle dependent**. In a strong cycle (e.g. 23), many MCs produce intense storms, whereas in a weak cycle (24), even numerous MCs resulted in only moderate disturbances due to weaker fields. Thus, the ambient solar condition modulates MC impact. Early cycle 25 results suggest MC geoeffectiveness is rebounding (witnessing a –213 nT storm in 2023).

- **Non-MC CMEs (Ejecta) contribute substantially to geomagnetic activity but tend to produce weaker storms than MCs.** These “complex ejecta” or sheath-only events have lower efficiency in driving storms. Roughly half or fewer result in Dst  $\leq -50$  nT storms. Still, due to their higher occurrence rate (especially around solar maximum), they are important: they caused about 40–50% of ICME-driven storms in cycles 23–24. Intense storms from non-MC CMEs are less common, usually requiring a strong shock or favorable interaction. Non-MC CME geoeffectiveness appears relatively **constant across the solar cycle** (no strong phase preference was found), meaning their average impact per event doesn't change much from max to minimum – it's the number of events that changes.

- **High-Speed Streams (HSS) and CIRs have lower per-event geoeffectiveness but dominate geomagnetic activity during declining and minimum phases.** Only a few percent of HSS cause Dst  $< -100$  nT storms, and even the strongest HSS-driven storms barely exceed that threshold (none reached superstorm level in the studied cycles). Nevertheless, HSS routinely cause moderate storms (Dst  $\sim -50$  to –



80 nT) and prolonged geomagnetic unrest. Notably, in the weak cycle 24, HSS/CIRs were nearly as important as CMEs in terms of storm-days produced. The **solar cycle phase dependence** is pronounced: HSS-driven geomagnetic activity surges in the **descending phase**

of cycles, confirming past results that geomagnetic indices have a secondary peak during the declining phase due to CIRs (the classic “Gnevyshev gap” in sunspot activity is filled with geomagnetic activity

### Top 10 geomagnetic storms (1986-2025) and their driver type

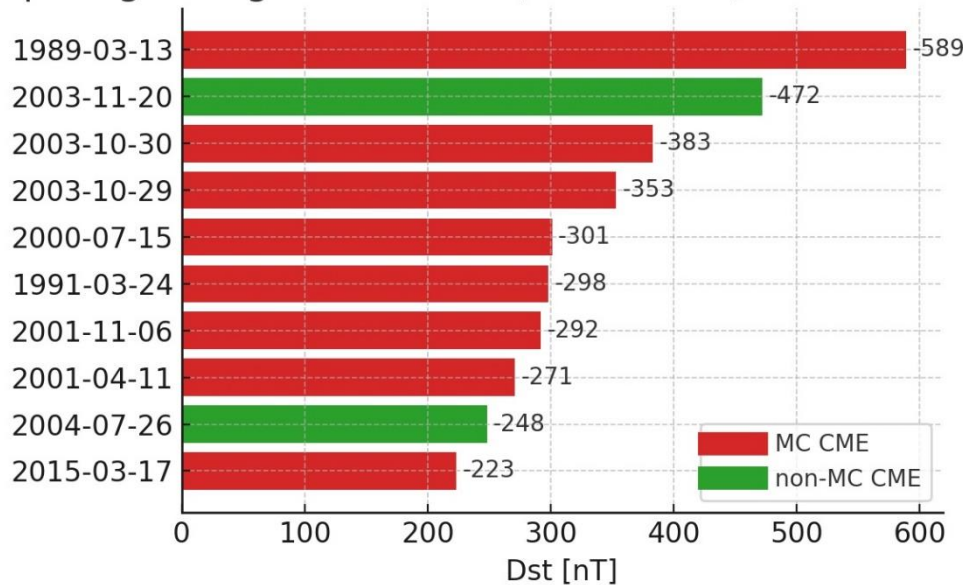


Figure 5: Ten most extreme geomagnetic storms in 1986–2025 (ranked by minimum Dst). All ten were caused by CMEs, underlining that the most severe storms are invariably CME-driven. Eight events (red bars) were driven by magnetic cloud ICMEs – for example, the **13 March 1989 “Montreal” superstorm** (Dst –589 nT) resulted from a fast MC with an extraordinarily strong southward field. The **Halloween storms** of 29–30 October 2003 (Dst  $\approx$  –370 nT and –300 nT) were likewise caused by interplanetary flux ropes from two major CMEs. The **Bastille Day storm** on 15 July 2000 (Dst –301 nT) and the **“Carrington-class” 24 March 1991 storm** (Dst  $\sim$  –300 nT) also arose from Earth-directed MC ejecta. Two events (green bars) were caused by unusually geoeffective non-MC CMEs – e.g. the **20 November 2003 storm** (Dst  $\sim$  –472 nT) was driven by a strong interplanetary shock/sheath from a fast CME and ranks as the second-largest storm of the period. Notably, no HSS event comes close to these extremes: even the potent HSS/CIR storms of Cycle 24 only reached Dst  $\approx$  –150 nT. The **St. Patrick’s Day 2015 storm** (Dst –223 nT) is the lone Cycle 24 event in this top tier, highlighting the relative weakness of that cycle’s geomagnetic activity.

from HSS). We found that  $\sim$ 70% of geomagnetic storms caused by SIRs occurred in the descending phase. Thus, while HSS are not major producers of intense storms, they are crucial for understanding space weather impacts in years around solar minimum.

- **Solar cycle 24 versus 23 represented a shift toward HSS contributions and weaker CME storms**, but this trend may not continue if solar activity rebounds. Cycle 24 had  $\sim$ 50% fewer storms overall than cycle 23, and  $\sim$ 80% fewer intense storms, chiefly because of weaker CMEs. The fraction of storms from HSS nearly doubled (from  $\sim$ 20% to  $\sim$ 50%) from cycle 23 to 24. This supports the idea of a long-term rise (up to cycle 23) and then drop (cycle 24) in sunspot-geomagnetic correlation – essentially, cycle 24 was an outlier with geoeffectiveness disproportionately maintained by HSS. For cycle 25, early data already show a return of strong CME-driven storms (e.g. April 2023). We tentatively conclude that **cycle 25 is on track to produce more frequent and stronger CME storms than cycle 24**, while HSS will play a typical supporting role in the later years. Continuous monitoring will tell if the balance of drivers in cycle 25 more closely resembles cycle 23 or 24.

- **Phase-wise geoeffectiveness summary:** In the **rising and peak phase** of a cycle, CMEs (especially MCs) are the predominant geomagnetic risk, with the largest storms typically occurring near solar maximum or shortly thereafter. In the **declining phase**, HSS and CIRs become highly geoeffective in a cumulative sense, causing many days of geomagnetic disturbances, although CMEs from late-cycle active regions can still cause isolated big storms. At **solar minimum**, geomagnetic activity is low but not zero – HSS from persistent coronal holes ensure a baseline level of activity (e.g. recurrent auroras and Kp 4–5 events), and the rare CMEs can still produce minor storms. This phase-dependent behavior is important for operational space weather planning, as it indicates when geomagnetic activity can strike “out of phase” with solar activity (e.g., the geomagnetic Ap index can peak a year or two after sunspot peak due to HSS).

In conclusion, understanding the geoeffectiveness of different solar drivers across solar cycles improves our ability to anticipate geomagnetic activity under various solar conditions. The period from cycle 22 through the beginning of 25 has demonstrated the dynamic interchange between CME-dominated and HSS-

dominated geomagnetic driving. As we move forward, maintaining long-term data sets of solar wind structures (through missions like ACE, WIND, DSCOVR, and the upcoming IMAP) and geomagnetic indices is crucial. These data enable us to refine models of solar wind–magnetosphere coupling and to adjust our expectations as the Sun’s behavior evolves. Cycle 25 will provide another valuable datapoint – early results suggest a resurgence of CME influence, but its full course will reveal whether the heightened role of HSS seen in cycle 24 was an anomaly or part of a continuing pattern. Regardless, the interplay of HSS, MCs, and other CMEs will continue to shape Earth’s space weather in a way that requires attentive, phase-aware forecasting and a holistic view of the solar wind–magnetosphere system.

#### Acknowledgements

This study is supported by the National Science Fund of Bulgaria, Contract KP-06-N44/2 /27-11-2020 “Space weather over a period of the century solar activity descending”

#### References

1. Kirov, B., Babiy, B., Georgieva, K. & Atanasov, D. 2006 “Geoeffectiveness of Different Solar Drivers, and Long-Term Variations of the Correlation Between Sunspot and Geomagnetic Activity,” *Physics and Chemistry of the Earth*, 31, 1–6, <https://doi.org/10.1016/j.pce.2005.02.008>
2. Miteva, R. & Samwel, S. W. 2023 “Catalog of Geomagnetic Storms with  $Dst \leq -50$  nT and Their Solar and Interplanetary Origin (1996–2019),” *Atmosphere*, 14(12), 1744, <https://doi.org/10.3390/atmos14121744>
3. Richardson, I. G. & Cane, H. V. (“Near-Earth Interplanetary Coronal Mass Ejections During Solar Cycle 23 (1996–2009): Catalog and Summary of Properties,” *Solar Physics*, 264, 189–237, <https://doi.org/10.1007/s11207-010-9568-6>
4. Lepping, R. P., Wu, C.-C., and Berdichevsky, D. B.: Automatic identification of magnetic clouds and cloud-like regions at 1 AU: occurrence rate and other properties, *Ann. Geophys.*, 23, 2687–2704, <https://doi.org/10.5194/angeo-23-2687-2005>, 2005
5. Jian, L.K., Luhmann, J.G., Russell, C.T. et al. Solar Terrestrial Relations Observatory (STEREO) Observations of Stream Interaction Regions in 2007–2016: Relationship with Heliospheric Current Sheets, Solar Cycle Variations, and Dual Observations. *Sol Phys* 294, 31 (2019). <https://doi.org/10.1007/s11207-019-1416-8>
6. Chi, Y., Wang, C., Luo, B. et al. 2018 “Geoeffectiveness of Stream Interaction Regions From 1995 to 2016,” *Space Weather*, 16, 1125–1148, <https://doi.org/10.1029/2018SW001853>
7. Tsurutani, B. T., Gonzalez, W. D., Gonzalez, A. L. C., Tang, F., Arballo, J. K. & Okada, M. 1995 “Interplanetary Origin of Geomagnetic Activity in the Declining Phase of the Solar Cycle,” *Journal of Geophysical Research*, 100(A11), 21717–21733, <https://doi.org/10.1029/95JA01476>
8. Shen, C., Wang, Y., Feng, X. & Wu, S. 2017 “Statistical Comparison of the ICME’s Geoeffectiveness of Different Types and Different Solar Phases From 1995 to 2014,” *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 122(6), Li 5931–5948, <https://doi.org/10.1002/2016JA023768>
9. Li, Y., Luhmann, J.G. & Lynch, B.J. “Magnetic Clouds: Solar Cycle Dependence, Sources, and Geomagnetic Impacts.” *Sol Phys* 293, 135(2018), <https://doi.org/10.1007/s11207-018-1356-8>
10. G. Verbanac, S. Živković, B. Vršnak, M. Bandić and T. Hojsak. „Comparison of geoeffectiveness of coronal mass ejections and corotating interaction regions” *A&A* Volume 558, October 2013. DOI <https://doi.org/10.1051/0004-6361/201220417>
11. Gopalswamy, N., Yashiro, S., Akiyama, S., Mäkelä, P. & Michalek, G. 2015 “Properties and Geoeffectiveness of Magnetic Clouds During Solar Cycles 23 and 24,” *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 120(10), 9221–9245, <https://doi.org/10.1002/2015JA021446>
12. Yermolaev, Y. I., Nikolaeva, N. S., Lodkina, I. G. & Yermolaev, M. Y. 2012 “Geoeffectiveness and Efficiency of CIR, Sheath, and ICME in Generation of Magnetic Storms,” *Journal of Geophysical Research*, 117, A00L07, <https://doi.org/10.1029/2011JA017139>
13. SIDC/STCE 2023 “Intense Geomagnetic Storms During SC25,” *STCE News*, <https://www.sidc.be/article/intense-geomagnetic-storms-during-sc25>
14. Wu, C.-C., R. P. Lepping, D. B. Berdichevsky, and K. Liou (2017), A comparison between the geoeffectiveness of north-south and south-north magnetic clouds and an associated prediction, *Space Weather*, 15, 517–525, doi:10.1002/2016SW001520.
15. Lockwood, M., Stamper, R. & Wild, M. N. 1999, “A Doubling of the Sun’s Coronal Magnetic Field During the Past 100 Years,” *Nature*, 399, 437–439, <https://doi.org/10.1038/20867>

# ECONOMIC SCIENCES

## DIRECTIONS FOR IMPROVING COMPETITIVE STRATEGIES IN AZERBAIJAN'S LOGISTICS SERVICES

**Aliyev Isa Mohammad**

*PhD student,*

*Baku Business University, Baku city, Azerbaijan, Lecturer*

<https://orcid.org/0009-0009-5658-1389>

### Abstract

The article analyzes the current state of logistics services in Azerbaijan and explores ways to improve competitive strategies for the development of this sector. It highlights the country's favorable geographical location and its strategic role in the East-West and North-South transport corridors. The importance of logistics in economic growth, strengthening the service sector, and expanding international trade relations is emphasized. The study shows that infrastructure projects implemented in recent years have enabled Azerbaijan to become a regional logistics hub. The article also highlights the impact of the Russia-Ukraine war on global trade routes and emphasizes the importance of the Middle Corridor route, within which Azerbaijan is seen as gaining new opportunities. Overall, the article presents both theoretically and practically that the modernization of logistics infrastructure, the involvement of the private sector, digitalization, and international cooperation should be prioritized as key areas for improving competitive strategies.

**Keywords:** competitive strategies, transport corridors, logistics infrastructure, service sector, logistics services, competitiveness-oriented strategic development, regional logistics hubs.

### Introduction

Since the 1990s, the Republic of Azerbaijan has declared its political sovereignty, achieved economic independence, and ensured the comprehensive development of various infrastructure sectors [7, p.31]. This infrastructure development and economic independence have created a favorable foundation for the rapid and high-quality development of the service sector in the country.

However, the results of macroeconomic research indicate that, in terms of growth rates, Azerbaijan still lags behind economically developed countries in certain essential services (such as healthcare, culture, education, transportation, etc.). Furthermore, in Western Europe, North America, as well as countries like Japan, Malaysia, Singapore, and others, the share of service employment related to knowledge-intensive activities is higher than in Azerbaijan [5, p.4]. In this regard, the analysis of the development level of the service sector is both one of the key indicators of economic growth and an important factor for the deepening of social welfare.

The service sector, as one of the material production sectors, is a crucial component of society's productive activity. In recent years, the development of the service sector reflects the distinctive characteristics of the Azerbaijani economy. This type of economic dynamics arises, on the one hand, from changes in the purposeful structure of business, and on the other hand, from the increase in the real income of the population [5, p.4]. All these processes further highlight the growing significance of the service sector, both locally and globally, making it essential to analyze the development trends of this sector in a broader context.

The 21st century, characterized by the intensification of globalization and integration processes, is also remembered as an information age, marked by the rapid development of the service sector

in the economic field. Observations show that, in recent decades, the share and role of the service sector in the economy have been increasing, which can be attributed to two main reasons. First, the increase in people's income allows for a higher expenditure not only on physical goods but also on services. The second reason is the development of ICT, which has expanded the possibilities of the service sector and increased its economic value. Experience has shown that, precisely due to these reasons, starting from the second half of the 20th century, in developed countries, the service sector began to outpace the production sector. As a result, today, the service sector holds a larger share in GDP formation and employment provision in most countries around the world. The growing market share of the service sector has, in fact, ensured the diversification of the economy and specialization across sectors. Although there are rich potential opportunities for the development of most service sectors in the Republic of Azerbaijan, the share of this sector in GDP fluctuates between 26-33%. This indicates that the existing potential in service sectors is not fully and effectively utilized in our country. [1, p.6-20]

The results obtained show that the role of the service sector in economic development is continuously increasing in a globalized world, and the demand for this sector necessitates the implementation of new approaches. In this context, the logistics system, being one of the most important areas of the service sector, holds significant importance. The proper organization and management of logistics services have a substantial impact on both the efficiency of the national economy and international competitiveness.

Logistics is a theoretical and practical field of activity related to the planning, organization, functional management, and control of the movement of material, labor, financial, and informational flows within a

market economy system. Logistics attempts to regulate all processes associated with the production of goods and the provision of services, from suppliers to final consumers. Based on this logic, it can be concluded that logistics is a necessity for the modern stage of economic development. [4, p.36]

Logistics services play a crucial role in the efficient and sustainable operation of the national economy. These services ensure the correct and coordinated delivery of goods and services from production to the consumer, thus fulfilling the function of maintaining the continuous operation of the economic system. The improvement of logistics services enhances the efficiency of economic activities.

The development of foreign trade is also one of the important directions in which logistics impacts the economy. The efficient implementation of import and export operations and the development of transportation and logistics infrastructures strengthen the country's position in international trade. In this regard, Azerbaijan holds strategic importance as a transit country along the Middle Corridor and North-South transport routes.

The logistics value chain creates economic value at each stage. The processes of warehousing, transportation, and information management services along the path from production to final consumption directly affect the quality and market price of the product. This, in turn, is considered one of the key factors influencing the overall competitiveness of enterprises. At the same time, the logistics sector creates significant employment opportunities, contributing to the improvement of socio-economic welfare. Many companies operate in this sector, dealing with transit services and warehousing. Thus, logistics is considered a significant sector both economically and socially.

The efficient organization of logistics strategies is a crucial issue for gaining a competitive advantage in both domestic and international markets. In this regard, improvements in this area can have a positive impact on the development of the service sector. One of the key issues in our country in this field may be increasing the role of logistics in regional economic development. In this context, the establishment of logistics centers, warehouses, and transport corridors in the regions may be vital for enhancing the economic potential of these areas. This can also lead to the creation of new investments and job opportunities.

As a result, logistics services serve as one of the main sectors within the service industry in the national

economy. Their development creates a foundation for the formation of a long-term competitive environment within the service sector. Thus, on one hand, the increasing intensity of interest and demand for the application of logistical approaches is determined by the demands and outcomes of market relations. On the other hand, the acceleration of logistics management and its wide application in economic life have a significant impact on the improvement of the market relations system and the country's economic policy course. [3, p.106]

#### Contents of the study

Azerbaijan's advantageous geographical location allows for the continuous enhancement of its trade potential. The constant improvement of Azerbaijan's logistics sector has led to an increased role in both regional and international markets. In general, due to the favorable geographical position of our country in both the East-West and North-South corridors, Azerbaijan has the opportunity to obtain a significant share from both transit trade and import-export operations. Several major infrastructure projects, such as ports and railways, have been implemented in the country. Considering the above, the improvement of logistics infrastructures in Azerbaijan, increasing the level of private sector participation, boosting revenues from transit trade, and increasing the service sector's share in the Gross Domestic Product (GDP) could lead to the growth of trade volume.

The development of logistics in Azerbaijan is not only related to utilizing the positive aspects of the country's geographical location but also to the implementation of modern infrastructure projects. In this regard, the operations of the Absheron logistics center ensure the further strengthening of the country's position in international trade and transit operations.

The Absheron logistics center, which is a private logistics hub in Azerbaijan, complies with international standards and certifications and is located at the heart of the Great Silk Road. Since its inception on August 13, 2018, in the Lokbatan settlement, the center allows for direct access from the terminal to the main road transport routes, enabling faster delivery to the target. Equipped with strong infrastructure facilities, high service quality, modern technologies, and rich operational capabilities, the center conducts transit customs operations through the customs authorities located on-site. The logistics center provides services through a "single window" system, which saves time and reduces costs. [8]

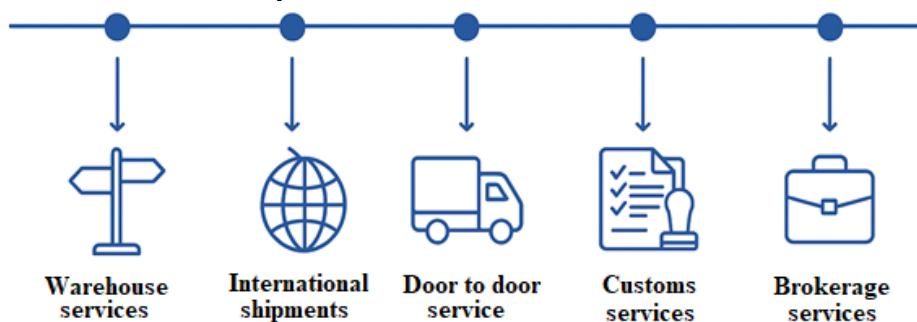


Figure 1. Services of the Absheron logistics center. Note: The figure is prepared by the author.

In addition, The Fruit Limited Liability Company ("Meyvəli") was established on May 16, 2008, by a group of entrepreneurs. The main activity of the "Meyvəli" logistics center is the wholesale and retail distribution of fruits and vegetables. The primary goal of the logistics center's establishment is to meet the demands of the Azerbaijani population and to facilitate the timely, safe, and efficient delivery of agricultural products produced by local farmers to the local market. To achieve this, the "Meyvəli" logistics center is strategically located on the outskirts of the city, at the entrance to Baku. Its favorable location has made it easier to transport agricultural products from every region of the country to the capital. In addition, the "Meyvəli" logistics center offers refrigerated warehouses for public use. Products stored in these warehouses do not lose their quality, and farmers have the opportunity to store their products here. The establishment of the "Meyvəli" logistics center has had a positive impact not only on the region but also within the Commonwealth of Independent States area, creating a fruit and vegetable base that is unparalleled. It has contributed to the country's development, improved the welfare of the population, and created new job opportunities. [9]

The logistics sector in Azerbaijan is still in its early stages, but it holds significant potential. For many, a logistics center is nothing more than a warehouse whose sole purpose is to store goods. For these reasons, the current logistics market is small. However, recent global political tensions have created several

perspectives for the development of logistics in our country.

Thus, the rapidly changing geopolitical situation against the backdrop of the Russia-Ukraine war has not only increased global security risks but has also directly impacted global trade. Since the outbreak of the war in 2022, the importance of traditional trade routes connecting Europe and Asia has diminished, while the significance of new alternative trade corridors has risen. In this context, one of the main alternative trade corridors connecting Western countries to the Asia region is the Middle Corridor route. Known primarily as the Middle Corridor and of special strategic importance, one of the key participants in this corridor is Azerbaijan.

Azerbaijan's key strategic advantage in this project is its ability to connect the Central Asia region to Turkey and subsequently to Europe via the Caspian Sea basin. Undoubtedly, Azerbaijan, which has turned its geographic advantage into one of the main mechanisms of its foreign policy influence, aims to become one of the world's leading logistics centers. In pursuit of this goal, Azerbaijan has implemented a number of strategically significant transportation and logistics projects in recent years. For instance, in 2024, Azerbaijan successfully completed the modernization of the Baku-Tbilisi-Kars railway line, and based on the president's instructions, the master plan for the second phase of the expansion of the Baku International Sea Trade Port is currently being prepared.



Figure 2. The Middle Corridor route connecting Western countries with the Asian region. Note: The figure was compiled by the author.

The Middle Corridor - Trans-Caspian International Transport Route, which holds significant strategic importance on the Eurasian continent, is an international trade and transport route stretching from China to Europe through Central Asia, the Caspian Sea, the South Caucasus, and Turkey. The countries marked in dark blue on the map - Kyrgyzstan, Uzbekistan, Turkmenistan, Azerbaijan, Georgia, and Turkey are considered the main transit and connecting countries along this route.

Azerbaijan plays a central role in the Middle Corridor. The country's access to the Caspian Sea and the Baku International Sea Trade Port serves as a key bridge along this route. At the same time, through the Baku-Tbilisi-Kars railway, Azerbaijan acts as one of the main transit corridors for the delivery of cargo to

Europe. The logistics and infrastructure projects implemented by Azerbaijan - particularly the Alat Free Economic Zone - contribute to strengthening this strategic position. The Middle Corridor is considered a strategic transportation project, especially in terms of providing a fast and secure connection between Europe and Asia. Additionally, this corridor constitutes an important component of China's "Belt and Road" initiative.

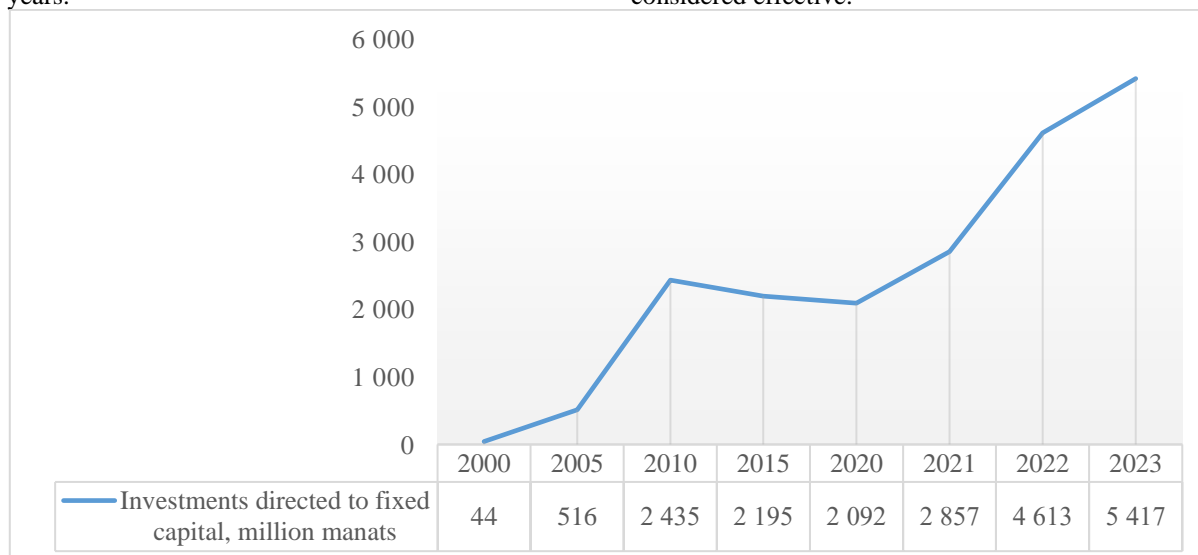
Taking all these factors into account, Azerbaijan has recently been engaging in collaborations with Turkey, Georgia, China, and the Central Asian republics to develop new projects aimed at advancing the logistics sector.

During the visits of the delegation of Azerbaijan Railways (ADY) to China and Central Asian countries,



discussions were held with counterparts on strengthening cooperation in the railway sector, increasing freight turnover, expanding the volume of multimodal cargo transportation along the Central Asia-Europe-Central Asia and China-Europe-China corridors, attracting new cargo flows to the Middle Corridor, and promoting the potential of this corridor in European markets. The discussions and resulting agreements constitute an essential component of the structural and financial reforms implemented in Azerbaijan's transport sector in recent years.

It should be noted that significant structural and financial changes have taken place in Azerbaijan's transport sector over the past 20 years. The purposeful orientation of state policy towards this field, particularly the attraction of large-scale investments for the reconstruction of the liberated territories, has elevated the transport infrastructure to a qualitatively new stage. All the work carried out is clearly reflected in the statistical indicators. From this perspective, the analysis of key macroeconomic indicators related to transportation is considered effective.

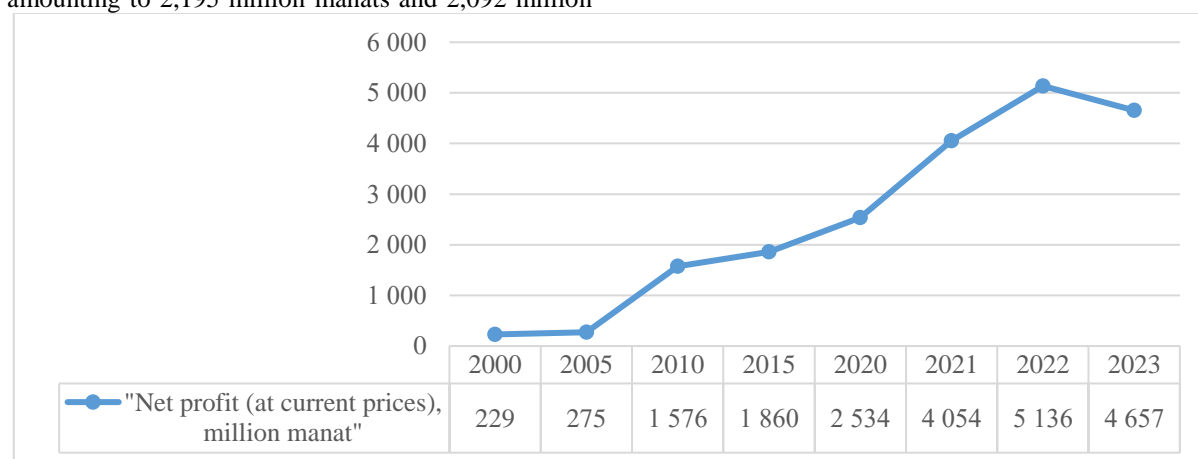


Graph 1. Investments directed to fixed capital in the transport sector in Azerbaijan, million manats. The source: Compiled based on the data from the State Statistical Committee of the Republic of Azerbaijan (SSCRA). [6, p.9]

Graph 1 clearly shows that in Azerbaijan, investments directed to fixed capital in the transport sector were significantly low in the year 2000 - amounting to only 44 million manats. By 2005, this figure had risen to 516 million, marking the beginning of a phase of substantial growth. In 2010, investments increased even more sharply, reaching 2,435 million manats. During this period, large-scale infrastructure projects were implemented in the country, including the reconstruction of major roads and integration into international transport corridors.

A certain decline was observed in 2015 and 2020, amounting to 2,195 million manats and 2,092 million

manats, respectively. This is considered to be associated with global economic instability, fluctuations in oil prices, and the postponement of some domestic projects. However, a significant increase has been recorded since 2021. Investments, which stood at 2,857 million manats in 2021, rose to 4,613 million manats in 2022. In 2023, the highest figure-5,417 million manats- was registered. This growth is mainly attributed to the reconstruction of transport infrastructure, including the construction of railways and highways, in the liberated territories. Now, let us examine the net profit indicators in the transport sector in Azerbaijan. (Graph 2.).



Graph 2. Net profit from transportation in Azerbaijan (at current prices), in million manat. The source: Compiled based on the data from the SSCRA. [6, p.9]

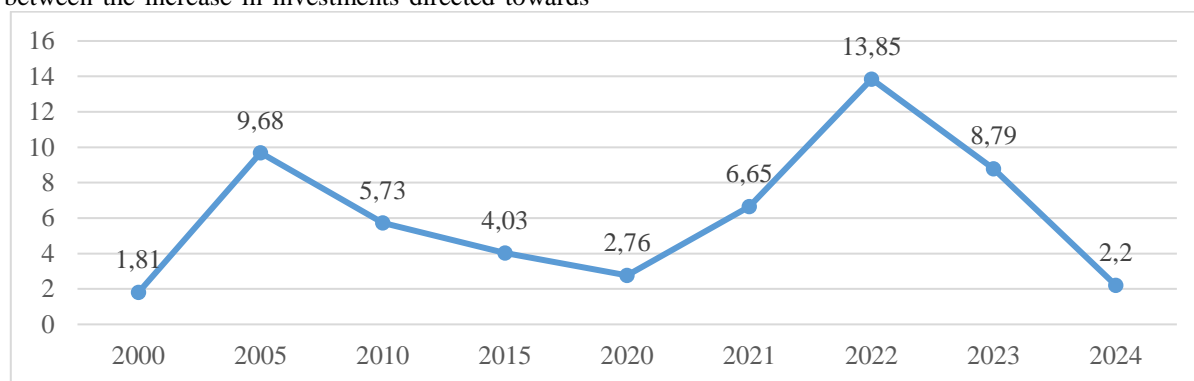
In Azerbaijan, the net profit in the transportation sector was at a very low level between 2000 and 2005, showing a slight increase from 229 million manat to 275 million manat. The real breakthrough occurred in 2010, when the sector achieved significant progress in terms of profitability, reaching 1,576 million manat. In 2015, the net profit amounted to 1,860 million manat, and in 2020, it rose to 2,534 million manat. During this period, the sector demonstrated stable development. In 2021 and 2022, net profit reached its highest levels, with figures of 4,054 million manat and 5,136 million manat, respectively. However, in 2023, a decline in this indicator was observed, with net profit falling to 4,657 million manat. This decline may be attributed to several factors: the time required for investments to convert into revenue, some projects not yet generating income, or rising costs (such as the increase in construction material prices, labor costs, etc.).

When examining the relationships between the two graphs, it is clear that there is a direct correlation between the increase in investments directed towards

fixed capital and the growth of net profit. However, this correlation sometimes manifests with a delayed effect. For instance, in 2022, both investments and profits reached their peak, but in 2023, while investments increased, profits declined. This indicates that investments do not immediately generate returns-profitability may materialize several years later.

Overall, the graphs demonstrate that investments in the transportation sector gradually yield economic results, and this sector is becoming one of the sustainable pillars of the national economy.

During the indicators, reflecting only the current prices leads to an analysis without considering the impact of inflation. Therefore, when making comparisons between years, it becomes difficult to determine how much of the increase is real, as the purchasing power of the manat may change. Considering this, it is deemed efficient to present an additional graph based on inflation-adjusted indicators at real prices and conduct an evaluation.



Graph 3. Annual inflation in Azerbaijan, in percent (%). The source: Compiled based on the data from the SSCRA. [11]

To understand how real the increases in the indicators are, it is necessary to consider the impact of inflation. Therefore, the analysis related to inflation can be carried out as follows (Graph 1):

- 2000 - The inflation rate was 1.81%. This is relatively low, and the comparison of the figures with real values is not very significant.
- 2005 - The inflation rate was 9.68%, which is quite high. This could result in future increases being real lower. The reported increase of 516 million manat, when adjusted for inflation, may not be as high as it initially seems.
- 2010 - The inflation rate was 5.73%. The increase of 2,435 million manat, while high in real terms, has been diminished in value when adjusted for inflation.
- 2015 - The inflation rate was 4.03%, and a significant increase occurred during this period. The investment of 2,195 million manat, when valued at real prices, remains significant.
- 2020 - The inflation rate was 2.76%. The investment of 2,092 million manat during this period is considered relatively high when compared to inflation.
- 2021 - The inflation rate was 6.65%, yet the investment was 2,857 million manat. Despite high inflation, this indicates a strong increase in investment.

- 2022 - The inflation rate reached 13.85%, which is very high. The increase in investment, totaling 4,613 million manat, may not appear as significant when compared to real values due to the impact of inflation.

- 2023 - The inflation rate was 8.79%. The decline in net profit this year could be due to the effects of inflation and the rise in costs. Despite an investment of 5,417 million manat, the inflation factor diminishes this increase.

The inflation analysis indicates that, in some years, investment growth may decline due to the impact of inflation. However, with the future development of the transport sector and the continuation of strategic infrastructure projects, Azerbaijan can continue to generate revenue in this field. The implementation of innovative logistics projects is considered essential to ensure high returns on new investments.

### Proposals

After all the analyses, it can be stated that the logistics sector in the service industry has become one of the priority areas in Azerbaijan in recent years. This growing interest in the sector can be observed through the investments directed towards it. In this regard, considering this interest, the primary goal should be to achieve high profits with minimal costs. Therefore, the implementation of innovative projects in the logistics

service sector in the country could lead to an increase in the sector's share in the GDP and the creation of new job opportunities. In this context, the implementation of a number of projects is considered to be efficient.

1. Creation of Regional Logistics Hubs in the liberated territories. It may be possible to transform the liberated territories into logistics hubs of the South Caucasus by establishing strategic transportation and trade centers in these areas. In particular, the creation of logistics hubs in the Zangilan region, considering the location of the Zangezur Corridor and its proximity to Iran and Nakhchivan, could be efficient. Additionally, implementing such a project in Fuzuli, given the presence of the international airport and the Fuzuli-Aghband railway, could yield high efficiency. These centers can facilitate the development of the service sector by creating the infrastructures listed below: [10]

- Dual-purpose warehouses
- Passenger and cargo terminal
- Customs-broker service offices
- Logistics incubators for small and medium-sized entrepreneurs
- Packaging and labeling centers for entrepreneurs

*The benefits that can be obtained from centers:*

- The interregional movement of goods could be accelerated, with products coming from Kalbajar, Tovuz, and other areas, and being loaded in Zangilan.
- Foreign companies, particularly from Turkey and Central Asian countries, could utilize these hubs.
- The country's and region's currency flow could increase, which would consequently boost state revenues.
- Jobs would be created, and the return of internally displaced persons to the areas could be expedited.

## 2. The establishment of logistics service centers.

These centers are multifunctional office and facility complexes that offer all services in one place for companies and entrepreneurs engaged in logistics. In these centers, transportation, storage, packaging, documentation, customs, export, and import services are provided in one location, as part of a single "system." This means that entrepreneurs or carriers can address all their logistics needs in one place without having to go to separate locations. Here, services such as customs services, documentation, registration and training of carriers, warehouse rental services, and cargo insurance are available. [12]

**The establishment of logistics service centers in the outskirts of Baku, particularly in areas such as Hövsan and Zabrat, as well as at the Ganja-Samukh junction, and in the regions of Zangilan and Fuzuli, could be highly beneficial for regional trade. These centers could provide several positive advantages for the service sector, especially in the logistics field, including the following:**

- Small entrepreneurs have the opportunity to introduce their products to the international market.
- Access to services is simplified, and costs are reduced.
- The performance indicators of the logistics sector in the service industry are improving.

## Result

The role of logistics services in Azerbaijan's economic development is increasingly growing. Strengthening the competitiveness of this sector is one of the key steps toward transforming the country into a regional and international transport and transit hub. The analyses conducted in the article demonstrate that, in the context of the development of the non-oil sector, improving the quality of logistics services, the implementation of digital technologies, the proper formulation of competitive strategies, and the integration of local companies into international practices are essential conditions.

Research shows that in the modern era, logistics is not only the transportation of goods and services but also one of the key instruments in shaping the economic security and competitiveness of countries. Based on the analysis conducted in this article, it can be concluded that the correct and comprehensive application of competitive strategies in the development of logistics services in Azerbaijan is of paramount importance. Although there have been certain achievements in this field, more efficient and innovative strategies are needed in the face of global and regional challenges.

In a time when digitalization is rapidly advancing, the adaptation of logistics services to this technological transformation, as well as the implementation of digital platforms and smart management systems, emerges as a crucial factor.

Azerbaijan's favorable geographical location, access to international transport corridors, and the ongoing reconstruction process in the region create strategic advantages in this field. As a result, improving the competitive strategies in Azerbaijan's logistics services can not only increase economic efficiency but also strengthen the country's regional leadership and help establish an image of a reliable partner in the global trade system.

## References

1. Əsədov A.M, Əsədov Ə.M. Xidmət sahələrində kommersiya fəaliyyətinin əsaslan (Dərs vəsaiti). Bakı: "Yeni poliqrafist" MMC, 2016. 284 s.
2. İbrahimov İ.H. Regionlarda sahibkarlığın inkişaf meylləri və xüsusiyyətləri. Bakı: "Sada" nəşriyyatı, 2007. 296 s.
3. İmanov T.İ. Logistikaın əsaslan (Dərslik). Bakı: "Tohsil" NPM, 2005. 474 s.
4. Qəribov A, Pənahov A.M. Beynəlxalq ticarət və logistika (Dərs vəsaiti). Bakı: "Füyuzat" nəşriyyatı, 2024. 557 s.
5. Səbzəliyev S.M, Abbasov Q. Xidmət sahələrində mühasibat (maliyyə) uçotu (Dərs vəsaiti). Bakı: "Təknur" nəşriyyatı, 2015. 384 s.
6. State Statistical Committee of the Republic of Azerbaijan. "Transport in Azerbaijan" / Statistical yearbook / Baku: 2024. 81 p.
7. Zakizade S.S. The role of infrastructure investments in economic development of Azerbaijan. Norwegian Journal of development of the International Science. №132/2024, ISSN 3453-9875. p.31-36. <https://doi.org/10.5281/zenodo.11199043>
8. Abşeron logistika mərkəzi.



URL:  
<https://absheronport.az/az/page/haqqimizda/about-the-center>.

9. Meyvəli logistik mərkəzi.

URL: <https://meyveli.az/contact.html>.

10. Logistics hub: what is it and how it works, 17 May 2022.

URL: <https://paack.co/logistics-hub-what-it-is-and-how-it-works/>

11. State Statistical Committee of the Republic of Azerbaijan.

URL: <https://www.stat.gov.az>.

12. Why you need to a one-stop logistics solution, 4 March 2024.

URL: <https://blog.ninjava.co/en-ph/one-stop-logistics-solution/>

## COMPARATIVE ANALYSIS BETWEEN ISLAMIC AND CONVENTIONAL BANKS CHARACTERISTICS' IMPACT ON THEIR RISK-TAKING BEHAVIOUR

**Mumtozaposho Kurbonova**

*Teacher at International Islamic Academy of Uzbekistan*

### Abstract

This study provides a comparative analysis of the risk-taking behavior of Islamic and conventional banks, emphasizing the distinctive characteristics that influence their approaches to risk management. Islamic banks, guided by Maqasid al-Shariah, adhere to unique ethical principles that shape their governance structures, financial instruments, and risk profiles. The research examines the differences in common and specific risks faced by both banking systems and analyzes internal and external factors influencing their risk-taking behavior. The role of the Shariah Supervisory Board (SSB) in shaping risk decisions within Islamic banks is critically evaluated. The study also highlights the discrepancies between theoretically recognized risks and practical risk management within Islamic banks, offering insights into the implications for banking stability and performance.

**Keywords:** Islamic banks, conventional banks, risk-taking behavior, Maqasid al-Shariah, Shariah Supervisory Board, risk assessment, financial stability, profit-loss sharing.

### Introduction

Banks, regardless Islamic or conventional, serve a single function of mediating between economic agents with deficit and surplus finances. Islamic banks must, simultaneously, observe higher ethical objectives - *Maqasid al-Shariah*. Such observance of Shariah rules<sup>1</sup> leads to emergence of unique corporate, operational, instrumental features that are only specific to Islamic Banks (IB). Firstly, Islamic bank's corporate structure comprises both *Board of Directors* (BOD) and *Shariah Supervisory Board* (SSB), unlike their conventional counterparts only having the former. Secondly, IBs adopt *risk-sharing* (profit-sharing) model in contrast to interest-based one in traditional banks (Ehsan Ullah & Sabirzyanov, 2015). Risk-free business practices and excessive risk-taking are absolutely prohibited in Islamic Finance. Thus, the concept of *essential risk-taking* emerges which is inherent in all business transactions.

These peculiarities, according to Hassan & Mollah (2018), correspondingly, transform **risk-taking behaviour** of IBs and result in more complex risk types. The following essay attempts to critically analyse how IB characteristics influence risk-taking decisions in comparison with traditional banking, firstly, by analysing

their risk profiles, followed by various factors shaping such behaviour.

### Discussion

To comprehend and compare risk-taking behaviour of Islamic and conventional banks, its crucial to identify how risk map of both are deviated from each other (figure 1). Many studies highlight that IBs' exposure to risks can be classified into two categories: (1) *common risks* and (2) *specific risks* (Ahmed & Khan, 2007; Zainol & Kassim, 2012; Salem, 2013). Risks found in both Islamic and conventional banks are regarded as *common*, such as operational, liquidity, credit, and market risks. For instance, Sorwar *et al.* (2016) emphasizes the characteristic similarity of market risk in both banking industries. Whereas, Akkizidiz & Khandelwal (2007) suggest that even such generic risks may differ in implications and severity in IBs. Furthermore, the exposure frequency to identical risks might also greatly vary in them (Ariffin *et al.*, 2009).

### Specific risks of IBs

Due to principal differences in the business model, corporate governance and contractual basis, there are several unique risks in Islamic banking (Hassan *et al.*, 2019).

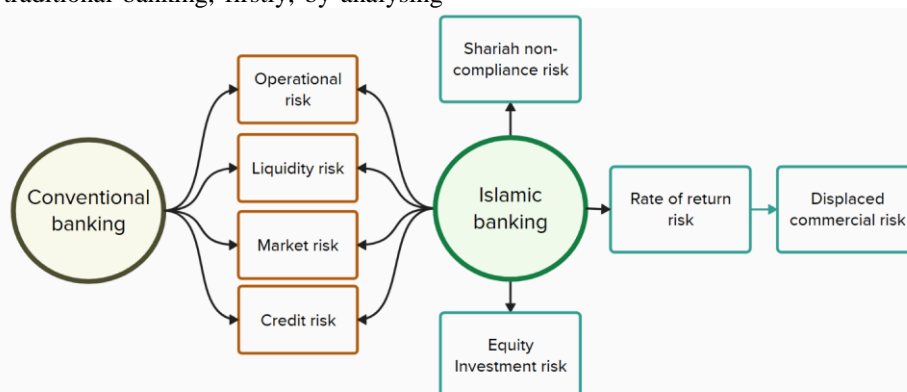


Figure 1. Common versus specific risks faced by IBs.2

<sup>1</sup> To ensure Shariah compliance, Islamic banks have to avoid certain prohibitions: (1) charging interest; (2) excessive uncertainty; (3) gambling; (4) investing in unethical businesses (e.g. alcohol, pork, pornography).

<sup>2</sup> Developed by author via 'Mural' software

As depicted in figure 1, the first inherent risk in the nature of IBs is *Shariah non-compliance risk*. It is considered to arise when there is a deviation from the theory of Shariah law in practice (Alhammadi *et al.*, 2020). At the same time, it is classified to be within the category of operational risks by Rhanoui & Belkhoutout (2019). Shariah non-compliance risk mainly results from the negligence of Shariah Supervisory Board (SSB), and according to Salem (2013), it is exacerbated by the challenge of maintaining Shariah compliance while operating in globalised financial system preoccupied by conventional model. *Rate of return risk* is the second risk (figure 2), and emanates from the 'expected profit' instead of 'guaranteed interest' in IBs (Chattha *et al.*, 2020). Accordingly, byproduct of lower rate of return is *displaced commercial risk*. Rouetbi *et al.* (2023) argues that lower rate of return encourages profit-driven investors to withdraw their deposits and thus, IBs will be under pressure to 'compensate for the loss' waiving certain percentage from bank's profit. According to Abedifar *et al.*, (2013) however, this

'trade-off' practice is a partial deviation from authentic profit-loss sharing principles of Islamic Finance. Lastly, *equity investment risk* is the third most mentioned inherent risk and directly reflects the nature of murabah/musharakah contracts – equity participation (Helmy, 2012).

Interestingly, Rhanoui & Belkhoutout (2019) suggest that these theoretically recognized risks are not all identified, assessed and managed in practice. For example, based on their study<sup>3</sup> conducted on IBs in Malaysia, *displaced commercial risk* and *equity investment risk* are hardly ever reported in their risk profile.

#### Factors effecting bank risk-taking behaviour

Magnis *et al.* (2023) attest that risk-taking decisions of banks are affected by a number of complex factors, typically classified as internal and external (figure 2). *External factors* typically comprise, but not limited to, economic condition of the region, inflation rate, monetary policy, market concentration, political issues, etc.

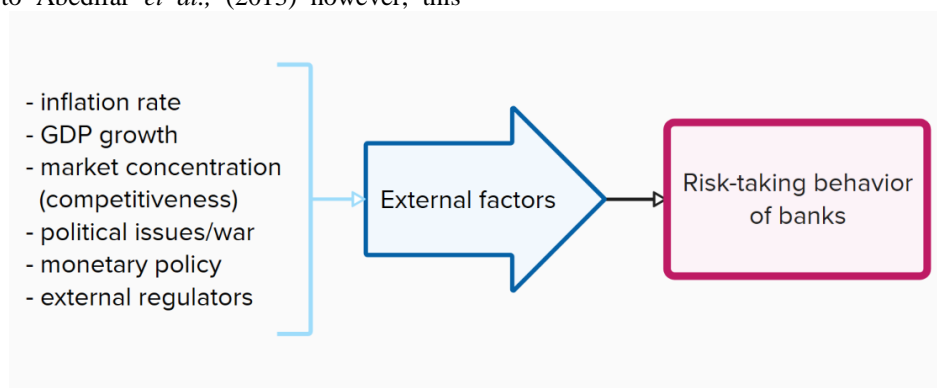


Figure 2. External factors effecting bank risk-taking behaviour.<sup>4</sup>

To illustrate the impact of *external regulators*, high capital ratio requirements imposed by Basel II had positive effect on credit risk of banks in MENA (Middle east and North Africa) region, moderating their risk-taking (Maghyreh & Awartani, 2014). Regarding the impact of *competitiveness*, many studies postulate the positive relationship between market competition and risk-taking of banks (Mateev *et al.*, 2022). According

to Allen & Gale (2004), such high risk-taking behaviour of banks in competitive markets is to maintain their profitability. As illustrated in the figure 2, these factors impact banks risk-taking decisions externally.

#### Internal factors

At the same time, there are certain characteristics, e.g. ownership structure, size, capitalization, location, etc. that differ from bank to bank, and are only peculiar to the bank individually (figure 3).

<sup>3</sup> See appendix 1

<sup>4</sup> Developed by author via 'Mural' software

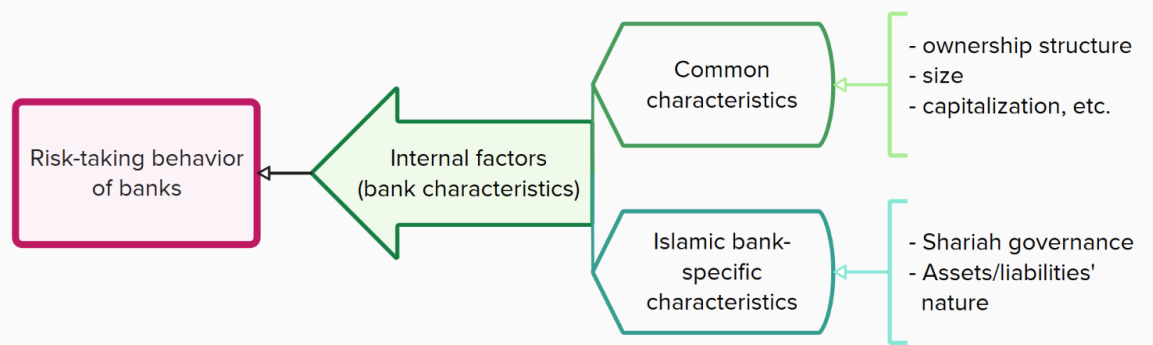


Figure 3. Internal factors (bank characteristics) effecting risk-taking behaviour.<sup>5</sup>

These characteristics tailor the risk-appetite within an each bank in a unique way, thus are called *internal factors*. Likewise risk types, internal factors can be classified as *common* and *IB specific* characteristics. Below are given 3 major common internal factors and how they impact risk-taking behaviour of both banking systems.

#### Common characteristics

**Ownership structure** can influence banks in two dimensions: (1) *ownership concentration*<sup>6</sup> and (2) *nature of owner profiles* (Mateev *et al.*, 2022). Although, theoretically, the higher concentrated ownership is expected to accelerate more pronounced risk-taking, from empirical perspective the scenario is quite ambiguous. While Leaven & Levine (2009) proved the relationship between concentrated ownership and greater risk, the reverse is demonstrated by Shehzad *et al.* (2010) in relation to credit risk. The latter finding is further supported by the search of Srairi (2013): the negative association, i.e. banks with high ownership concentration experienced much lower insolvency and asset risks. This can be explained by the argument of Burkart *et al.* (1997), once large shareholders put high pressure on monitoring, it discourages bank managers to initiate new risky investment opportunities.

*Nature of owners*, namely family-owned, company/private-owned and state-owned, also plays vital role. Anderson *et al.* (2003) found that family banks tend to engage in less risky activities to ensure bank's survival in long term. Moreover, Srairi (2013) complements that as bank managers and owners form singly entity - the family itself, there is no misalignment in risk preferences. This, in turn minimises agent-principal problem, where the interests of principal (shareholder) and agent (manager) mismatch in non-family banks.. Private commercial banks, reasonably, are found to be more risk averse by Zheng *et al.* (2017), whereas state-owned banks suffer from higher insolvency risk compared to private banks. Positive relationship between government ownership and risk can be explained by the argument of Iannotta *et al.* (2007), which signifies that risk-taking decisions are dictated by bureaucrats biased with political interests.

- **Bank size** is typically considered to be strong determinant of risk-taking (Fernandes *et al.*, 2021). Significant negative correlation between size and riskiness of banks is empirically identified by many studies, as demonstrated larger banks have wider range of opportunities to better diversify their portfolios (Saif-Alyousfi & Saha, 2021; AlAbbad *et al.*, 2019; Srairi, 2013). Nevertheless, large banks practically can take bigger risks as they are capable of easily managing in case of misfortune occurrence (Fernandes *et al.*, 2021).

- **Capitalisation** factor is rather similar to bank size: banks with low capitalisation increase the risk, while better capitalised banks are characterised with decreased risk-taking (Anh, 2022; Alman, 2012). Although capitalisation's role in risk-taking decisions does not necessarily result in disputes among scholars, an exception is observed by Saif-Alyousfi & Saha (2021) during Global financial crisis. Study findings illustrate that unlike pre- and post-crisis period, highly capitalized banks took more risky activities during financial crisis compared to ones with low capitalisation.

All above mentioned *internal factors* are common in both Islamic and conventional banking (figure 3). These *bank characteristics* (ownership structure, size, capitalization level) shape risk-taking decisions of both banking systems in identical manner, i.e. large bank size and capitalization result in less risk in both banks in identical manner (Saif-Alyousfi & Saha, 2021).

#### IB specific characteristics

Shariah feature of IBs reflects in their corporate governance structure. Unlike 'single-layer' structure comprising of Board of Directors (BOD) in conventional banks, IB employ 'multi-layer' governance with Shariah Supervisory Board (SSB) in addition to BOD (Mollah & Zaman, 2015). SSB actively participates in supervising the operations, product development and managerial decisions to ensure compliance of IBs. Such a close engagement indispensably intensifies SSB's impact on risk-taking behaviour.

#### The role of SSB in risk-taking

On the one hand, Mollah *et al.* (2016) claims that governance structure in IBs encourages high risk-taking, in turn leading to better performance. From conventional perspective, accordingly, Fortin *et al.* (2010)

<sup>5</sup> Developed by author via 'Mural' software

<sup>6</sup> According to Alhababsah (2019), it is defined as 'the proportion of shares held by a single individual or entity'.

argues that more risk is taken if there is strong governance mechanism. This argument that high risk-taking manner of IBs may lead to enhanced financial performance is empirically supported by search finding of Sueb *et al.* (2022) conducted on 70 IBs in 18 countries. In stark contrast, on the other hand, it is argued by Prasajo *et al.* (2022) that risk-taking imposes considerable adverse effects on IBs' performance, even further reinforcing their position by statement that low risk-taking is an indicator of high efficiency. Though some scholars, such as Nomran *et al.* (2018) prefer more neutral approach toward SSB's role, asserting that SSB moderates risk-taking behaviour of managers, to balance the interests of depositors and shareholders. Despite ongoing disputes about whether SSB encourages or discourages risky decisions among academics, its strong association with risk-taking of IBs clearly can be denied.

#### **Impact of different SSB attributes in risk-taking**

Likewise, the exact manner of how various SSB features, such as size, education level, diversity, etc impact risk-taking has been debated continually.

- According to Alman (2012) large **SSB size** encourages loan portfolio risk-taking. Consistently, Alabbad *et al.* (2019) and Safiullah & Shamsuddin (2017) endorse this view by highlighting positive correlation between increase in SSB size and active risk-taking behaviour. It is also mentioned that such association is more pronounced in decentralized SSB, which are ruled by individual banks, compared to state-ruled centralized SSB. However, in case of conventional banks, smaller BOD is associated with particularly risky decisions (Pathan, 2009).

- Similarly, high **quality of SSB** (i.e. education, expertise and doctoral qualifications) is claimed by Mukhibad & Setiawan (2022) to result in increasingly risky decisions. As Grassa (2013) argues, however, increased SSB quality means better supervision, which in turn decreases risk-taking. This view is confirmed by Nguyen (2021), as he found that enhanced effectiveness of SSB might constrain risk-taking in IBs.

#### **Conclusion**

In conclusion, IBs developed peculiar business model as a financial intermediary while observing Shariah rules. This peculiarity not only reflects in their corporate governance and financial instruments, but also results in unique risk-taking behaviour. This essay offers several concluding statements after thorough critical analysis of relevant literature. Firstly, IBs avoid two extremes: zero and excessive risk-taking (Ehsan-Ullah & Sabirzyanov, 2015). In other words, IBs take essential risk which is inherent in nature of commercial activities, instead of attempting to avoid all possible risks like conventional banks do. Secondly, there is marked difference between risk profiles of both banking systems, with that of IBs being more diverse and complicated. Thirdly, although there are some common external and internal factors that similarly affect risk-taking decision of both banks, IBs have additional specific bank determinants impacting their risk-taking. Finally, an extra layer in governance structure of IBs - Shariah Supervisory Board (SSB) - which monitors and directly influences risk-taking behaviour of IBs. The fact that religious belief certainly effects managerial decisions i.e. risk-taking is even proved from Christian perspective by Abakah & Li (2023).

#### **Limitations & Recommendations**

This essay, however, has limitations in terms of covering all bank characteristics that impact risk-taking decisions, e.g. financial interconnectedness, fintech usage, foreign ownership, language etc. and IB specific risks, e.g. fiduciary risk, mark-up risk, legal risk, commodity risk, etc.

Regarding recommendations, some implications of language usage in bank risk-taking should be studied in more depth. Interestingly, certain languages with more pronounced usage of future tense, is associated with more risk-taking and bank crisis (Osei-Tutu & Weill, 2020). Nevertheless, the impact of CEO/SSB changes, who speak languages with heavy stress on future tense, to the ones with relatively low usage and vice versa are understudied research area.

## Appendix

Table 1. Risk reports of IBs in Malaysia.<sup>7</sup>

	Bank Islam Malaysia Berhad	Bank Muamalat Malaysia Berhad	Kuwait Finance House Malaysia Berhad	MBSB Bank Berhad	Agrobank
<b>Credit risk</b>	Reported	Reported	Reported	Reported	Reported
<b>Market risk</b>	Reported	Reported	Reported	Reported	Reported
<b>Liquidity risk</b>	Reported	Reported	Reported	Reported	Reported
<b>Operational risk</b>	Reported	Reported	Reported	Reported	Reported
<b>Shari'a non-compliance risk</b>	Reported	Reported	Reported	Reported	Reported
<b>Rate of return risk</b>	Reported	Unreported	Unreported	Unreported	Reported
<b>Equity investment risk</b>	Reported	Reported	Unreported	Unreported	Unreported
<b>Displaced commercial risk</b>	Unreported	Unreported	Unreported	Unreported	Unreported

## References

1. Abakah, A.A. and Li, J. (2023) 'Local religious beliefs and bank risk-taking', *Journal of Behavioural and Experimental Finance*, 40.
2. Abedifar, P., Molyneux, P. and Tarazi, A. (2013) 'Risk in Islamic Banking', *Review of Finance*, 17, pp. 2035–2096.
3. Ahmed, H. and Khan, T., 'Risk management in Islamic banking', in *Handbook of Islamic Banking*. Cheltenham, United Kingdom: Edward Elgar, 2007, pp. 144–158.
4. Akkizidis, I.S. and Khandelwal, S.K., *Financial Risk Management for Islamic Banking and Finance*. London, UK: Palgrave Macmillan, 2007, pp. 112–130.
5. AlAbbad, A., Hassan, M.K. and Saba, I., 'Can shariah board characteristics influence risk-taking behaviour of Islamic banks?', *International Journal of Islamic and Middle Eastern Finance and Management*, 12(4), 2019, pp. 469–488.
6. Allen, F., & Gale, D., Competition and financial stability. *Journal of Money, Credit and Banking*, 36(3), 2004, pp. 453–480.
7. Alman, M., 'Shari'ah supervisory board composition effects on Islamic Banks' risk-taking behavior', *SSRN Electronic Journal*, 2004, pp. 54–78.
8. Anderson, R., Mansi, S. and Reeb, D., 'Founding family ownership and the agency cost of debt', *Journal of Financial Economics*, 68(2), 2003, pp. 263–285.
9. Anh, D.V., 'Does better capitalization enhance bank efficiency and limit risk taking? evidence from ASEAN Commercial Banks', *Global Finance Journal*, 2022, pp. 53–74.
10. Ariffin, N.M., Archer, S. and Karim, R.A., 'Risks in Islamic banks: Evidence from empirical research', *Journal of Banking Regulation*, 10(2), 2009, pp. 153–163.
11. Burkart, M., Gromb, D. and Panunzi, F. (1997) 'Large shareholders, monitoring, and the value of the firm', *The Quarterly Journal of Economics*, 112(3), pp. 693–728.
12. Ehsan Ullah, S. and Sabirzyanov, R., 'Risk management in Islamic Finance: an analysis from objectives of Shariah perspective', *International Journal of Business, Economics and Law*, 7(3), 2015, pp. 46–52.
13. Fernandes, C. et al., 'The impact of board characteristics and CEO Power on Banks' risk-taking: Stable versus crisis periods', *Journal of Banking Regulation*, 22(4), 2021, pp. 319–341.
14. Fortin, R., Goldberg, G.M. and Roth, G., 'Bank risk taking at the onset of the current banking crisis', *Financial Review*, 45(4), 2010, pp. 891–913.
15. Grassa, R., 'Shariah supervisory system in Islamic financial institutions: New issues and challenges: a comparative analysis between Southeast Asia models and GCC models', *Humanomics*, 29(4), 2013, pp. 333–348.
16. Hassan, A. and Mollah, S., 'Risk management in Islamic Financial Institutions', *Islamic Finance*, 2018, pp. 223–230.
17. Hassan, M.K., Khan, A. and Paltrinieri, A., 'Liquidity risk, credit risk and stability in Islamic and conventional banks', *Research in International Business and Finance*, 48, 2019, pp. 17–31.
18. Helmy, M., 'Risk management in Islamic banks', *ESLSCA Business School*, 2012, pp. 48–67.
19. Maghyereh, A. and Awartani, B., 'The effect of market structure, regulation, and risk on Banks Efficiency', *Journal of Economic Studies*, 41(3), 2014, pp. 405–430.
20. Laeven, L. and Levine, R., 'Bank governance, regulation and risk taking', *Journal of Financial Economics*, 93(2), 2009, pp. 259–275.
21. Magnis, C., Papadamou, S. and Iatridis, G.E., 'The impact of corporate governance mechanisms on mitigating banks' propensity for risk-taking', *Journal of Banking Regulation*, 2023, pp. 12–30.
22. Mateev, M., Nasr, T. and Sahyouni, A., 'Capital Regulation, market power and bank risk-taking in

<sup>7</sup> Rhanoui, S. and Belkhouhout, K. (2019) 'Risks faced by Islamic Banks: A Study on the compliance between theory and Practice', *International Journal of Financial Research*, 10(2), pp. 137–146.

the MENA region: New evidence for Islamic and conventional banks', *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 86, 2022, pp. 134–155.

23. Mollah, S. *et al.*, 'The governance, risk-taking, and performance of Islamic Banks', *Journal of Financial Services Research*, 51(2), 2016, pp. 195–219.

24. Mollah, S. and Zaman, M., 'Shari'ah supervision, corporate governance and performance: Conventional vs. Islamic Banks', *Journal of Banking & Finance*, 58, 2015, pp. 418–435.

25. Mukhibad, H. and Setiawan, D., 'Shariah Supervisory Board attributes and corporate risk-taking in Islamic banks', *Cogent Business and Management*, 9(1), 2022, pp. 36–54.

26. Nguyen, Q.K., 'Oversight of bank risk-taking by audit committees and Sharia committees: Conventional vs Islamic Banks', *Heliyon*, 7(8), 2021, pp. 104–125.

27. Nomran, N.M., Haron, R. and Hassan, R., 'Shariah supervisory board characteristics effects on Islamic banks' performance', *International Journal of Bank Marketing*, 36(2), 2018, pp. 290–304.

28. Osei-Tutu, F. and Weill, L., 'How language shapes bank risk taking', *Journal of Financial Services Research*, 59(1–2), 2020, pp. 47–68.

29. Pathan, S. 'Strong Boards, CEO power and bank risk-taking', *Journal of Banking and Finance*, 33(7), 2009, pp. 1340–1350.

30. Prasajo *et al.*, 'The relationship between risk-taking and Maqasid Shariah-based performance in Islamic banks: Does shariah governance matter?', *Banks and Bank Systems*, 17(1), 2022, pp. 137–149.

31. Rhanoui, S. and Belkhoutout, K., 'Risks faced by Islamic Banks: A Study on the compliance between theory and Practice', *International Journal of Financial Research*, 10(2), 2019, pp. 137–146.

32. Rouetbi, M., Ftiti, Z. and Omri, A., 'The impact of displaced commercial risk on the performance

of Islamic Banks', *Pacific-Basin Finance Journal*, 2023, pp. 79–98.

33. Safiullah, M. and Shamsuddin, A., 'Risk in Islamic banking and corporate governance', *Pacific-Basin Finance Journal*, 2018, pp. 129–149.

34. Saif-Alyousfi, A.Y.H. and Saha, A., 'Determinants of banks' risk-taking behaviour, stability and profitability: Evidence from GCC countries', *International Journal of Islamic and Middle Eastern Finance and Management*, 14(5), 2021, pp. 874–907.

35. Salem, R.A., *Risk management for Islamic banks*. Edinburgh, United Kingdom: Edinburgh University Press, 2013, pp.111–130.

36. Shehzad, C.T., de Haan, J. and Scholtens, B., 'The impact of bank ownership concentration on impaired loans and capital adequacy', *Journal of Banking and Finance*, 34(2), 2010, pp. 399–408.

37. Sorwar, G. *et al.*, 'To debt or not to debt: Are Islamic banks less risky than conventional banks?', *Journal of Economic Behaviour and Organization*, 132, 2016, pp. 113–126.

38. Srairi, S., 'Ownership structure and risk-taking behaviour in conventional and Islamic banks: Evidence for MENA countries', *Borsa Istanbul Review*, 13(4), 2013, pp. 115–127.

39. Sueb, M. *et al.*, 'The effect of Shariah board characteristics, risk-taking, and Maqasid shariah on an Islamic Bank's performance', *Banks and Bank Systems*, 17(3), 2022, pp. 89–101.

40. Zainol, Z. and Hj. Kassim, S., 'A critical review of the literature on the rate of return risk in Islamic Banks', *Journal of Islamic Accounting and Business Research*, 3(2), 2012, pp. 121–137.

41. Zheng, C. *et al.*, 'Does the ownership structure matter for banks' Capital Regulation and risk-taking behaviour? empirical evidence from a developing country', *Research in International Business and Finance*, 42, 2017, pp. 404–421.



# MATHEMATICAL SCIENCES

## NUMERICAL SOLUTION OF THE PROBLEM OF THE CREEPING MOTION OF A VISCOUS LAYER ALONG THE SLOPE OF AN ELEVATION

**Kuralbaev Z.**

*Professor, Doctor of Physico-mathematical Sciences  
Almaty University of Energy and Communications,  
Almaty, Kazakhstan.*

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПОЛЗУЩЕМ ДВИЖЕНИИ ВЯЗКОГО СЛОЯ ПО СКЛОНУ ВОЗВЫШЕННОСТИ

**Куралбаев З.**

*Профессор, доктор физико-математических наук  
Алматинский университет энергетики и связи,  
г.Алматы, Казахстан*

### Abstract

The problem of creeping motion of a highly viscous layer modelling the process of occurrence of landslides of sedimentary rocks located on the surface of an upland area is posed and solved. As a result of mechanistic and mathematical modelling, a mathematical problem about a quasilinear parabolic type equation is obtained. The finite-difference method has been used to solve the obtained mathematical problem; a nonlinear implicit computational scheme has been chosen, on the basis of which an algorithm for solving the problem has been formulated and a computer programme has been developed. Numerical experiment was carried out for various possible variants; mechanical characteristics of clayey rocks were taken as initial data of physical parameters. The results of the study are presented in the form of graphs.

### Аннотация

Поставлена и решена задача о ползущем движении сильновязкого слоя, моделирующего процесса возникновения оползней осадочных горных пород, находящихся на поверхности возвышенности. В результате механико-математического моделирования получена математическая задача о квазилинейном уравнении параболического типа. Для решения полученной математической задачи использован конечно-разностный метод; была выбрана нелинейная неявная расчетная схема, на основе которой сформулирован алгоритм решения задачи и разработана компьютерная программа. Проведен численный эксперимент для различных возможных вариантов; в качестве исходных данных физических параметров взяты механические характеристики глинистых пород. Результаты исследования представлены в виде графиков.

**Keywords:** sedimentary rocks, rheological properties, creep, landslide mechanism, mathematical model, numerical experiment.

**Ключевые слова:** осадочные породы, реологические свойства, ползучесть, механизм возникновения оползней, математическая модель, численный эксперимент.

### 1. Введение

Одной из актуальных проблем для горных районов являются исследования, связанные с таким явлением как оползни, возникающие в высокогорных областях вследствие различных причин, в частности изменения вязкостных свойств материалов из-за природных или климатических процессов [1-4]. Предполагается, что происходит движение некоторого верхнего слоя, состоящего из рыхлого грунта, который не способен выдерживать нагрузку собственного веса, поэтому происходит смещение. Такое геолого-горное явление представляет определенную угрозу сооружениям и населению, находящимся в таких районах.

При сохранении определенных геологических и климатических условий, в таких местах достаточно долгое время сохраняется устойчивое положение грунтовых материалов. Однако часто имеет место увлажнение и размытие горных пород дождевой или талой водой, что приводят к изменению вязкостных свойств материалов,

составляющих верхние слои грунта. Либо под влиянием тектонических или техногенных процессов могут возникать ползущие движения верхних слоев возвышенностей под воздействием собственной тяжести. Исследования такого явления является *актуальным* по известным причинам [1,2,3,4].

Многолетние наблюдения и изучение таких процессов показывали [3,4,5], что осадочные горные породы, которые покрывают более 75% поверхности земной суши, обладают свойством ползучести. «Ползучесть – явление постепенного роста деформации во времени при постоянном напряжении и снижением прочности при длительном нагружении» [7, стр. 36]. Учитывая, что ползучесть является причиной таких явлений, как оползни, селевые потоки, течения ледников и других, в данной работе приведено теоретическое исследование их с помощью математического и компьютерного моделирования. «Упрощенные подходы, такие как метод предельного равновесия,



не способны решить данную проблему прогнозирования устойчивости склонов в жестких глинах. Традиционные численные методы могут эффективно использоваться для прогнозирования деформационных процессов, происходящих в откосах на предразрушительной стадии» [3].

Данная работа посвящена математическому моделированию одного из вариантов механизма возникновения оползней, когда происходит опускание грунтов под воздействием собственного веса при изменении их реологических свойств. Здесь используется физическая модель «ползущих» тече-

ний в вязком слое [9], а для исследования рассматриваемого процесса - метод математического моделирования с проведением численного эксперимента.

## 2. Постановка задачи и ее математическая модель

В данном случае рассматривается вязкий слой определенной толщины (мощности), покоящийся на поверхности возвышенности и в начальный момент времени этот слой находится в устойчивом положении, отсутствует в нем какое-либо движение (Рис.1).

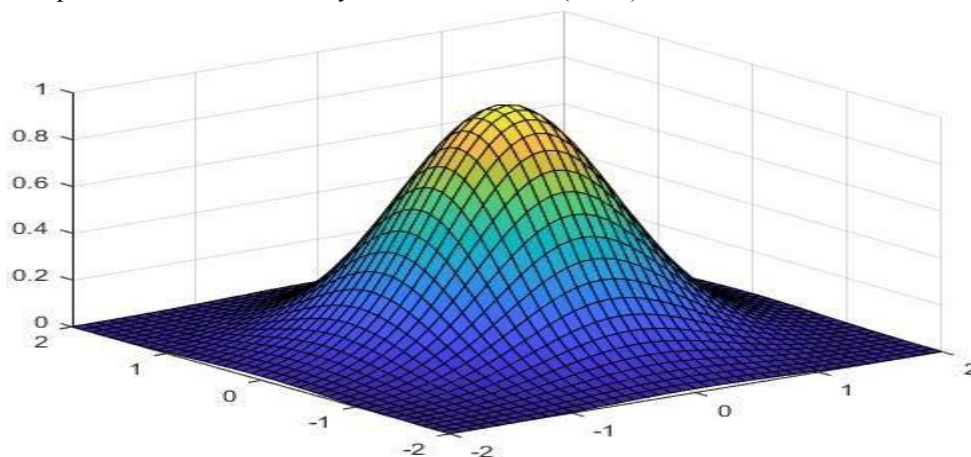


Рис.1 – Начальное положение возвышенности

Предполагается, что происходит снижение значения динамического коэффициента вязкости слоя, и из-за этого происходит движение материалов слоя вниз по склону возвышенности под воздействием собственного веса. Возникает необходимость создания математической модели этого процесса, и сформулировать математическую задачу.

Для создания математической модели рассматриваемого процесса определяются основные его параметры и вводятся соответствующие обозначения. Здесь принята прямоугольная система координат, в которой  $x$  и  $y$  - горизонтальные координаты, а  $z$  - вертикальная координата; ось  $z$  направлена вверх, обратно направлению вектора силы тяжести  $\vec{g}$ .

Для упрощения были использованы известные из гидродинамики допущения о «мелкой воде» [9]. Для проведения расчетов на компьютере использованы безразмерные параметры, для чего осуществлен переход к безразмерным параметрам. Проведен анализ слагаемых в безразмерных уравнениях, получены упрощенные математические зависимости, совокупность которых явилась математической моделью изучаемого процесса. Для описания свободной поверхности вязкого слоя получено следующее квазилинейное дифференциальное уравнение параболического типа в безразмерных переменных:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{ER}{3} \left[ \frac{\partial}{\partial x} (u - \xi)^3 \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} (u - \xi)^3 \cdot \frac{\partial u}{\partial y} \right] \quad (1)$$

Основание вязкого слоя описано следующей функцией [6-8]:

$$\xi(x, y) = (1 - f) \cdot e^{-\frac{x^2 + y^2}{b}} \cdot \left[ 1 - \frac{2(x^2 + y^2)}{b} \right] \quad (2)$$

где  $f$  - первоначальная толщина вязкого слоя.

В уравнении (1) имеется единственный безразмерный параметр  $ER = \frac{\rho g H^3}{\eta U L}$ , который зависит от физических и геометрических свойств вязкого слоя; где  $\rho$  - плотность материала и  $\eta$  - динамический коэффициент вязкости слоя,  $g$  - ускорение силы тяжести,  $U, H, L$  - характерные величины: скорость, вертикальный и горизонтальный размеры слоя соответственно.

Решение уравнения (1) позволяет вычислить значения скоростей движения материалов слоя по следующим формулам:

$$\begin{cases} u_x = \frac{ER}{2} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot [(z - u)^2 - (u - \xi)^2], \\ u_y = \frac{ER}{2} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot [(z - u)^2 - (u - \xi)^2]. \end{cases} \quad (3)$$

Предполагается, что в начальный момент времени ( $t = 0$ ), когда вязкий слой находится в состоянии устойчивого положения, его свободная поверхность была описана следующей безразмерной функцией:

$$u(x, y, 0) = e^{-\frac{x^2 + y^2}{b}} \cdot \left[ 1 - \frac{2(x^2 + y^2)}{b} \right]. \quad (4)$$

Из допущения о малости характерного вертикального размера слоя в сравнении сего характерным горизонтальным размером, можно с достаточной большой точностью предположить выполнение следующего условия:

$$u \rightarrow 0 \text{ при условии } x \rightarrow \pm\infty, y \rightarrow \pm\infty, \quad (5)$$

Приняты следующие граничные условия:

$$\begin{cases} x = \pm d, u(\pm d, y, t) = 0; \\ y = \pm d, u(x, \pm d, t) = 0; \end{cases} \quad (6)$$

Сформулирована постановка математической

задачи (1)-(6). В связи с тем, что относительно переменных  $x$  и  $y$  имеется симметрия, можно ограничиваться рассмотрением одномерной задачи.

### 3. Метод решения задачи

Для решения данной задачи использован конечно-разностный метод и алгоритм нелинейной расчетной схемы [9]:

$$u_i^{j+1} - u_i^j = \frac{ER}{3h} \cdot \tau \cdot [(u_{i+1}^{j+1} - \xi_{i+1})^3 \cdot \frac{u_{i+1}^{j+1} - u_i^{j+1}}{h} - (u_i^{j+1} - \xi_i)^3 \cdot \frac{u_i^{j+1} - u_{i-1}^{j+1}}{h}], \quad (7)$$

$$i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, 3, \dots, m;$$

где  $n$  — количество точек по переменной  $x$ , а  $m$  — по переменной  $t$ .

Полученные алгебраические уравнения (7) являются нелинейными относительно неизвестных  $u_i^j, i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, 3, \dots, m$ . Для решения таких уравнений может быть использован итерационный метод. В данном случае вводятся следующие обозначения:

$u_i = u_i^{j+1}$  — вычисляемое в следующей итерации значение искомой функции для  $j + 1$ ;  
 $w_i = u_i^{j+1}$  — вычисленное в предыдущей итерации значение искомой функции для  $j + 1$ ;  
 $v_i = u_i^j$  — вычисленное значение искомой функции в предыдущий момент времени (для  $j$ ).

Учитывая введенные обозначения, из формулы (7) можно получить следующую систему уравнений:

$$A_i \cdot u_{i-1} - (1 + A_i + A_{i+1}) \cdot u_i + A_{i+1} \cdot u_{i+1} = -v_i, \quad (8)$$

$$\text{где } i = 1, 2, 3, \dots, n; j = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Коэффициенты этой системы уравнений определены формулой:

$$A_i = \frac{ER}{3h} \cdot \tau \cdot (w_i - \xi_i)^3, i = 1, 2, 3, \dots, n. \quad (9)$$

Итак, поставленная задача приведена к системе алгебраических уравнений (8). Для каждого значения параметра  $j$  данную систему можно рассматривать как систему уравнений с «трехдиагональной матрицей».

### 4. Алгоритм решения задачи

Расчетная схема, которая основана на формулах (7), представляет собой итерационный процесс. В качестве нулевого приближения для метода итерации используется значение искомой функции на предыдущем слое ( $j$ ).

Внутри итерации будут выполнены следующие операции:

1. Определены значения коэффициентов системы уравнений (8) по формулам (9):

2. В прямой прогонке будут определены неизвестные коэффициенты:

$$\alpha_1 = 1; \beta_1 = 0. \quad (10)$$

$$\begin{cases} \alpha_{i+1} = \frac{A_{i+1}}{1 + A_i + A_{i+1}}, \\ \beta_{i+1} = \frac{v_i + A_{i+1} \cdot \beta_i}{1 + A_i + A_{i+1}}, \end{cases} i = 1, 2, 3, \dots, n - 1. \quad (11)$$

3. В обратной прогонке будут определены значения искомой функции по формулам:

$$u_n = 0; u_i = \alpha_{i+1} \cdot u_{i+1} + \beta_{i+1}, i = n - 1, n - 2, \dots, 1. \quad (12)$$

4. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока не будет выполнено условие заданной точности вычислений:

$$\max\{|u[i] - w[i]|\} < \varepsilon,$$

где  $\varepsilon$  — малое положительное число.

### 5. Численная реализация алгоритма

Проведен численный эксперимент с помощью разработанной компьютерной программы. В данном случае решение задачи зависит только от одного безразмерного параметра  $ER$ . Элементарные расчеты показали, что для большинства осадочных пород, в том числе глинистых, покрывающих значительную часть земной поверхности, порядок значений безразмерного параметра  $ER$  могут быть в пределах 0,01; 0,1; 1,0; 10. Для этих значений данного параметра были проведены расчеты.

В план численного эксперимента включены следующие данные:

— для безразмерного параметра  $ER$  приняты четыре значения:  $ER = 0,01$ ;  $ER = 0,1$ ;  $ER = 1,0$ ;  $ER = 10$ ;

— шаги по независимым переменным:  $h = 0,002$ ;  $\tau = 0,0001$ ;

— первоначальная толщина слоя принята постоянной и равной  $f = 0,3$ ;

— для определения точности вычислений принято  $\varepsilon = 0,0001$ ;

— расчеты проводились для промежутка времени  $0 \leq t \leq 10$ ;

— промежуток по горизонтальной переменной составил  $-3 \leq x \leq 3$ .

**Результаты численного решения задачи.** В результате численной реализации алгоритма решения данной задачи получены результаты, которые представлены в виде графиков. Определены положения вязкого слоя для различных моментов времени в промежутке  $0 \leq t \leq 10$  для разных значений безразмерного параметра  $ER$ . Из-за того, что при  $ER = 0,01$ , когда динамический коэффициент вязкости имеет достаточно большое значение, изменение первоначального положения вязкого слоя оказалось незначительным, график для этого случая здесь не представлен.

На фиг.2-4 показаны некоторые положения вязкого слоя в момент времени  $t = 10$  для значений параметра  $ER$ : 0,1; 1,0; 10.

Результат решения задачи для  $ER = 0.1$  приведен на следующем рисунке (Рис 2.). В данном случае коэффициент вязкости слоя достаточно высокий. Поэтому перемещение материалов слоя оказалось небольшим.

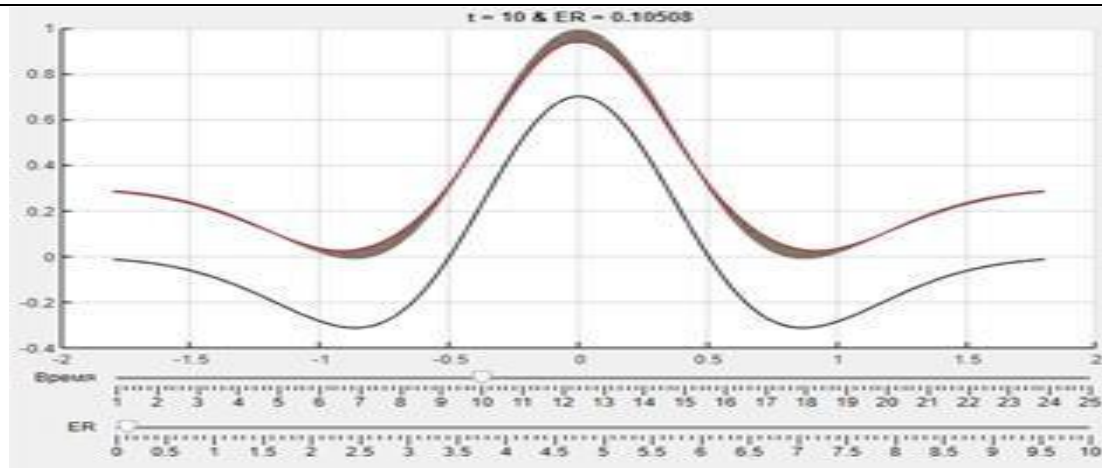


Рис. 2 – Положение вязкого слоя при  $t = 10$  для  $ER = 0,1$ .

В случаях, когда динамический коэффициент вязкости слоя имеет небольшие значения, что слой ведет себя как вязкий слой, и перемещение материалов слоя будет значительным (Рис.3):

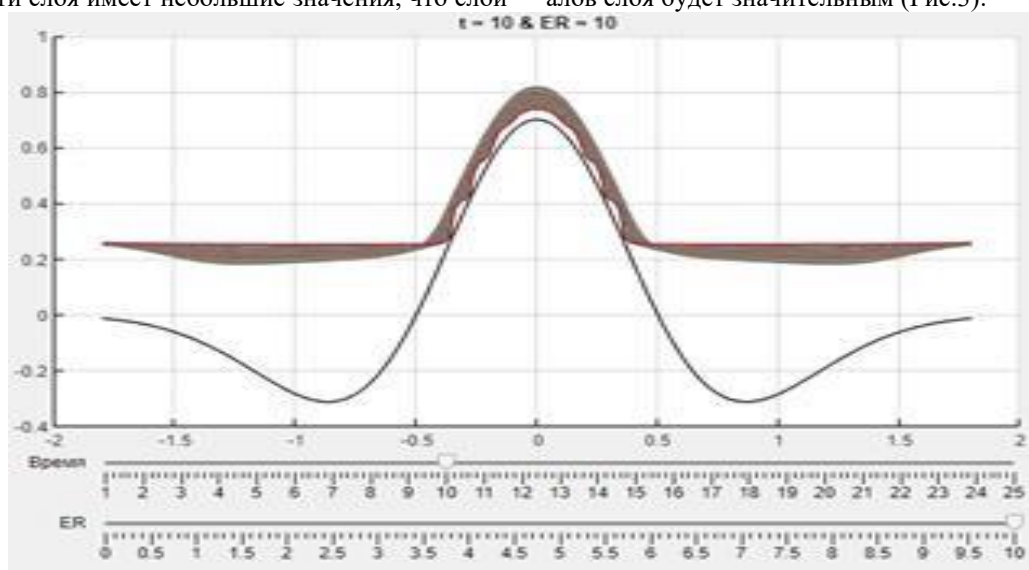


Рис. 3 – Положение вязкого слоя при  $t = 10$  для  $ER = 10$ .

## 6. Анализ результатов

В связи с тем, что основным параметром, влияющим на рассматриваемый процесс, является изменение значения динамического коэффициента вязкости, изменение этого параметра было учтено в качестве основного фактора при исследовании данного процесса. Следовательно значения параметра  $ER$ , зависящего обратно пропорционально от динамического коэффициента вязкости, были использованы для численного эксперимента.

Из анализа численных результатов следует, что при достаточно большом значении динамического коэффициента вязкости ( $ER \square 0,1$  и  $ER \square 0,01$ ) изменение первоначального состояния слоя будет незначительным. В самом деле, опускание максимальной точки (вершины) внешней поверхности слоя за промежуток времени  $t \square 10$  составляет для случая, когда  $ER \square 0,1$ , всего на 6,15% (уменьшение от 1 до 0,9385), а для случая, когда всего на 1.09% (то же самое, от 1 до 0,9891). Для сравнения можно привести данные для  $ER = 1$  и  $ER = 10$ . В двух последних случаях коэффициент вязкости будет иметь сравнительно небольшие значения. Опускание материалов вязкого слоя при этом

будет значительным, опускание вершины слоя составит для случая  $ER = 1$  около 18%, а для  $ER = 10$  около 20%.

Кроме этого, следует отметить, что из-за опускания материалов слоя происходит утонение верхних частей (Фиг.4), и за счет этого процесса происходит утолщение нижних частей рассматриваемой области, где накапливаются осадочные породы, толщина которых достигает значительных размеров. Утолщение слоя осадочных пород на самом нижнем уровне (на подошве) возвышенности для различных вариантов составляли от 13,6% до 84,2%.

## 6. Заключение

Следует отметить, что результаты решения данной задачи позволяет теоретическое (математическое) описание механизма возникновения оползней, залегающих на возвышенных местностях. Проведена оценка изменений, происходящих из-за оползней при уменьшении коэффициента вязкости осадочных пород. Полученные результаты исследования могут быть полезными для изучения такой актуальной проблемы, как механизмы происходящих в горных районах оползней осадочных пород.

Также могут быть использованы для оценки масштабов катастрофических последствий из-за возникновения оползней.

### Литература

1. Troncone A., Conte E., Donato A. Two and three-dimensional numerical analysis of the progressive failure that occurred in an excavation-induced landslide. *Engineering Geology*. 2014; 183:265–275. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2014.08.027>
2. Leroueil S. Natural slopes and cuts: movement and failure mechanism. *Geotechnique*. 2001;51(3):197–243. <https://doi.org/10.1680/geot.2001.51.3.197>
3. Дьяченко В.В., Туркин В.А., Воробьев А.Е., Кукарцев В.В., Тынченко Я.А. Механизмы формирования оползней повышенной опасности (быстрых и протяженных). - *Горная промышленность*. - №4, 2024. - стр. 96 - 100.  
<https://mining-media.ru/ru/article/new-tech/18888/>
4. Ержанов Ж. С. Механика тектонического развития Земли // *Известия АН СССР. – Серия геологическая*. –М.: Наука, 1973. – № 5. - С. 35 -45.
5. Bill Bruce G., Gurey Donald R., Marshal Grant A. Viscosity estimates for the crust and upper mantle from patterns of lacustine shoreline deformation in the Eastern Great Basin // *Journal of Geophysical Research*. B. – 1994. 99. Vol 11. P. 46 -58.
6. Ержанов Ж. С., Сагинов А.С., Гуменюк Г.Н., Векслер Ю. А., Нестеров Г. А. Ползучесть осадочных горных пород. – *Алма-Ата: Наука*, 1970. - 208 с.
7. Crosta G.B., Imposimato S., Roddeman D.G. Numerical modelling of large landslides stability and runout. *Natural Hazards and Earth System Science*. 2003;3(6):523–538. <https://doi.org/10.5194/nhess-3-523-2003>
8. Абатуров В.Г. Физико-механические свойства горных пород и породоразрушающий буровой инструмент. – *Тюмень: Изд-во «Нефтегазовый университет»*, 2007. -238 с.
9. Остапенко В. В. О применении теории мелкой воды для моделирования волновых течений с гидравлическими борами. // *Прикладная механика и техническая физика*. - 2018, Том 82, Выпуск 4, С. 444 -458.

Sadygov Misraddin Allahverdi oglu

Doctor of Physical and Mathematical Sciences

Baku State University

## n-СУБДИФФЕРЕНЦИРУЕМОСТЬ n-ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Садыгов Мисрадин Аллахверди оглы

доктор физико-математических наук

Бакинский Государственный Университет

## Abstract

In this paper we study  $n$ -convex functions. We mainly study four types of  $n$ -convex functions: lower semi-continuous  $n$ -convex functions, simple  $n$ -convex,  $n(A)$ -sublinear and  $n$ -sublinear functions. We also consider  $n$ -convex functions that are the pointwise upper bound of some non-empty family of  $n$ -affine,  $n(A)$ -affine,  $n$ -linear and  $n(A)$ -linear functions, respectively. It is shown that  $n$ -convex functions are closely related to convex functions defined on the tensor product of spaces. In this paper we study  $n$ -subdifferentiability of  $n$ -convex functions, simple  $n$ -convex,  $n$ -sublinear functions and study a number of their properties. In this paper we also study the properties of  $n$ -conjugate functions. In this paper we study the  $n$ -subdifferential of the maximum function. Using convex hulls of  $n$ -convex functions on the tensor product of spaces, criteria for  $n$ -subdifferentiability of  $n$ -convex functions are obtained. A characterization of  $n$ -convex functions and  $n$ -convex sets is considered.

## Аннотация

В работе изучаются  $n$ -выпуклые функции. В основном изучаются четыре типа  $n$ -выпуклых функций: полунепрерывные снизу  $n$ -выпуклые функции, простые  $n$ -выпуклые,  $n(A)$ -сублинейные и  $n$ -сублинейные функции. Рассматриваются также  $n$ -выпуклые функции, которые являются поточечной верхней гранью некоторого непустого семейства  $n$ -аффинных,  $n(A)$ -аффинных,  $n$ -линейных и  $n(A)$ -линейных функций соответственно. Показано, что  $n$ -выпуклые функции тесно связаны с выпуклыми функциями определенными на тензорном произведении пространств.

В работе изучается  $n$ -субдифференцируемость  $n$ -выпуклых функций, простых  $n$ -выпуклых,  $n$ -сублинейных функций и изучается ряд их свойств. В работе также изучаются свойства  $n$ -сопряженных функций. В статье изучается  $n$ -субдифференциал функции максимума. С использованием выпуклых оболочек  $n$ -выпуклых функций на тензорном произведении пространств, получены критерии  $n$ -субдифференцируемости  $n$ -выпуклых функций.

Рассматривается характеристика  $n$ -выпуклых функций и  $n$ -выпуклых множеств.

**Keywords:**  $n$ -convex function,  $n$ -subdifferential,  $n$ -concave function.

**Ключевые слова:**  $n$ -выпуклая функция,  $n$ -субдифференциал,  $n$ -вогнутая функция.

## 1. Введение

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  действительные банаховы пространства,  $R_{+\infty} = R \cup \{+\infty\}$ ,  $\bar{R} = R \cup \{\pm\infty\}$ ,

$R_+ = [0, +\infty)$ . Обозначим через  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  тензорные произведения пространств  $X_1, \dots, X_n$ .

Функцию  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  назовем  $n$ -выпуклой, если для любого  $i = 1, \dots, n$  и любых  $y_j \in X_j$ , соответствующих всем  $j \neq i$ , функции  $x_i \rightarrow f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  выпуклые при  $x_i \in X_i$ .

Такое определение  $n$ -выпуклой функции охватывает достаточно многие функции. Например, если  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  выпуклая функция, то она также является  $n$ -выпуклой. Если  $g_i : X_i \rightarrow R_{+\infty}$  выпуклые неотрицательные функции при  $i = 1, \dots, n$ , то  $g_1(x_1) \dots g_n(x_n)$  также является  $n$ -выпуклой функцией на  $X_1 \times \dots \times X_n$ , сужение на пространстве  $X_1 \times \dots \times X_n$  выпуклых функций определенных на  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  и ряд других классов функции являются  $n$ -выпуклыми.

Если  $g_i : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$   $n$ -выпуклые функции при  $i = 1, \dots, k$ , то  $\sum_{i=1}^k g_i(x_1, \dots, x_n)$  также является  $n$ -выпуклой функцией на  $X_1 \times \dots \times X_n$ .

Пусть  $x_{(1, \dots, n)t}^* : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R$   $n$ -линейная функция,  $x_{(1, \dots, n-1)t}^* : X_1 \times \dots \times X_{n-1} \rightarrow R$ , ...,  $x_{(2, \dots, n)t}^* : X_2 \times \dots \times X_n \rightarrow R$   $(n-1)$ -линейные функции,  $x_{(1, \dots, n-2)t}^* : X_1 \times \dots \times X_{n-2} \rightarrow R$ , ...,  $x_{(3, \dots, n)t}^* : X_3 \times \dots \times X_n \rightarrow R$   $(n-2)$ -линейные функции, ...,  $x_{1t}^* : X_1 \rightarrow R$ , ...,  $x_{nt}^* : X_n \rightarrow R$  линейные функции,  $c_t \in R$ , где  $t \in T$ ,  $T$  непустое множество. Положим

$$\theta_t(x_1, \dots, x_n) = x_{(1, \dots, n)t}^*(x_1, \dots, x_n) + x_{(1, \dots, n-1)t}^*(x_1, \dots, x_{n-1}) + \dots + x_{(2, \dots, n)t}^*(x_2, \dots, x_n) + \\ + x_{(1, \dots, n-2)t}^*(x_1, \dots, x_{n-2}) + \dots + x_{(3, \dots, n)t}^*(x_3, \dots, x_n) + \dots + x_{1t}^*(x_1) + \dots + x_{nt}^*(x_n) + c_t.$$

Отметим, что  $g(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} \theta_t(x_1, \dots, x_n)$   $n$ -выпуклая функция на  $X_1 \times \dots \times X_n$ .

Пусть  $g: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$ . Если функции  $x_i \rightarrow g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  положительно однородные и для любого  $i = 1, \dots, n$  и любых  $y_j \in X_j$ , соответствующих всем  $j \neq i$   $g(y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \dots, y_n) = 0$ , то функцию  $g$  назовем  $n$ -положительно однородной.

Если функции  $x_i \rightarrow g(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  выпуклые и положительно однородные и для любого  $i = 1, \dots, n$  и любых  $y_j \in X_j$ , соответствующих всем  $j \neq i$   $g(y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \dots, y_n) = 0$ , то функцию  $g$  назовем  $n$ -сублинейной.

Иногда в определениях  $n$ -положительно однородной и  $n$ -сублинейной функции для любого  $i = 1, \dots, n$  и любых  $y_j \in X_j$ , соответствующих всем  $j \neq i$  условие  $g(y_1, \dots, y_{i-1}, 0, y_{i+1}, \dots, y_n) = 0$  отсутствует.

Функцию  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  назовем  $n$ -вогнутый, если для  $i = 1, \dots, n$  и любых  $y_j \in X_j$ , соответствующих всем  $j \neq i$ , функции  $x_i \rightarrow f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  вогнутые при  $x_i \in X_i$ .

Если  $q(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = q(x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$  при  $i < j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , то функцию  $q: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  назовем четным. Если из  $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \in C$  следует, что  $(x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \in C$  при  $i < j$ ,  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ , то множеству  $C$  назовем четным.

Рассмотрим важные подклассы  $n$ -выпуклых функций. Общий случай изучается аналогично.

Обозначим через  $B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$  векторное пространство  $n$ -линейных непрерывных функций из  $X_1 \times \dots \times X_n$  в  $R$ . Пусть  $x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$ ,  $z^* \in (X_1 \times \dots \times X_n)^*$ ,  $\alpha \in R$ . Известно, что  $z^*(x_1, \dots, x_n) = z_1^*(x_1) + \dots + z_n^*(x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , где  $(z_1^*, \dots, z_n^*) \in X_1^* \times \dots \times X_n^*$ . Функцию  $b(x_1, \dots, x_n) = x^*(x_1, \dots, x_n) + z_1^*(x_1) + \dots + z_n^*(x_n) + \alpha$  назовем  $n(A)$ -аффинным при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

Функцию  $b(x_1, \dots, x_n) = x^*(x_1, \dots, x_n) + z_1^*(x_1) + \dots + z_n^*(x_n)$  назовем  $n(A)$ -линейным из  $X_1 \times \dots \times X_n$  в  $R$ .

Если  $x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$ ,  $c \in R$ , то функции  $b(x_1, \dots, x_n) = x^*(x_1, \dots, x_n) + c$  назовем  $n$ -аффинным. Множество всех  $n$ -аффинных функций из  $X_1 \times \dots \times X_n$  в  $R$  обозначим  $Ba(X_1 \times \dots \times X_n, R)$ .

Если множество  $\text{dom } f = \{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n : f(x_1, \dots, x_n) < +\infty\}$  непусто, то функция  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  называется собственной.

Особо отметим четыре важных подкласса  $n$ -выпуклых функций.

1) Совокупность собственных функций  $F: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  каждая, из которых является поточечной верхней гранью некоторого непустого семейства  $n(A)$ -аффинных функций, обозначим через  $A(X_1 \times \dots \times X_n)$ . Из этого определения немедленно следует, что все функции

$F \in A(X_1 \times \dots \times X_n)$   $n$ -выпуклы и полунепрерывны снизу.

2) Совокупность собственных функций  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$ , каждая из которых является поточечной верхней гранью некоторого семейства  $n$ -аффинных функций обозначим через  $AB(X_1 \times \dots \times X_n)$ .

3) Совокупность собственных функций  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$ , каждая из которых является поточечной верхней гранью некоторого семейства  $n$ -линейных непрерывных функций обозначим через  $SB(X_1 \times \dots \times X_n)$ .

4) Совокупность собственных функций  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$ , каждая из которых является поточечной верхней гранью некоторого семейства  $n(A)$ -линейных непрерывных функций обозначим через  $SA(X_1 \times \dots \times X_n)$ .

Считаем, что  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  снабжено проективной топологией. Если  $f_1(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = f_2(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , то отождествив функции  $f_1(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  и  $f_2(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$ , получим взаимно однозначное соответствие между классом всех функций, определенных на  $X_1 \times \dots \times X_n$  и  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  соответственно, значения которых совпадают. Поэтому если возможно, изучение свойства функций, определенных на  $X_1 \times \dots \times X_n$  можно привести к изучению свойства функций, определенных на  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ .

Отметим также четыре важных подкласса выпуклых функций.

- а) Множество всех собственных полунепрерывных снизу выпуклых функций из  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n$  в  $R_{+\infty}$  обозначим через  $\Gamma_0(X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n)$ .
- б) Множество всех собственных полунепрерывных снизу выпуклых функций из  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  в  $R_{+\infty}$  обозначим через  $\Gamma_0(X_1 \otimes \dots \otimes X_n)$ .
- в) Множество всех собственных полунепрерывных снизу сублинейных функций из  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  в  $R_{+\infty}$  обозначим через  $S(X_1 \otimes \dots \otimes X_n)$ .
- д) Множество всех собственных полунепрерывных снизу сублинейных функций из  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n$  в  $R_{+\infty}$  обозначим через  $S(X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n)$ .
- Легко проверяется между классами  $A(X_1 \times \dots \times X_n)$  и  $\Gamma_0(X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n)$ , между классами  $AB(X_1 \times \dots \times X_n)$  и  $\Gamma_0(X_1 \otimes \dots \otimes X_n)$ , между классами  $SB(X_1 \times \dots \times X_n)$  и  $S(X_1 \otimes \dots \otimes X_n)$  имеют тесные связи. Если  $g \in \Gamma_0(X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n)$  и  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , то  $\varphi \in A(X_1 \times \dots \times X_n)$ . Если  $g \in \Gamma_0(X_1 \otimes \dots \otimes X_n)$  и  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , то  $\varphi \in AB(X_1 \times \dots \times X_n)$ . Если  $g \in S(X_1 \otimes \dots \otimes X_n)$  и  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , то  $\varphi \in SB(X_1 \times \dots \times X_n)$ .

Если  $\varphi \in AB(X_1 \times \dots \times X_n)$  или  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , где  $g \in \Gamma_0(X_1 \otimes \dots \otimes X_n)$ , то функцию  $\varphi$  назовем канонической  $n$ -выпуклой. Если  $\varphi \in SB(X_1 \times \dots \times X_n)$  или  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , где  $g \in S(X_1 \otimes \dots \otimes X_n)$ , то функцию  $\varphi$  назовем канонической  $n$ -сублинейной. Отметим, что  $SB(X_1 \times \dots \times X_n) \subset AB(X_1 \times \dots \times X_n) \subset A(X_1 \times \dots \times X_n)$ . Каноническая  $n$ -выпуклая функция является  $n$ -выпуклой и полунепрерывной снизу, каноническая  $n$ -сублинейная функция является  $n$ -сублинейной и полунепрерывной снизу. Если  $\varphi \in A(X_1 \times \dots \times X_n)$ , то функцию  $\varphi$  назовем канонической  $n(A)$ -выпуклой.

Функцию  $z^*(x_1, \dots, x_n) = z_1^*(x_1) + \dots + z_n^*(x_n) + \alpha$  назовем аффинным, где  $z^* \in (X_1 \times \dots \times X_n)^*$ ,  $\alpha \in R$ ,  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Совокупность собственных функций  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$ , каждая из которых является поточечной верхней гранью некоторого семейства аффинных функций обозначим через  $\Gamma_0(X_1 \times \dots \times X_n)$ . Из этого определения немедленно следует, что все функции  $f \in \Gamma_0(X_1 \times \dots \times X_n)$  выпуклы и полунепрерывны снизу. Класс выпуклых функций из  $X_1 \times \dots \times X_n$  в  $R_{+\infty}$  хорошо изучен. В работе в основном изучается  $n$ -субдифференцируемость  $n$ -выпуклых функций, субдифференцируемость которых «существенно» отличаются от выпуклых функций.

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  линейные пространства. Также можно рассмотреть следующий подкласс  $n$ -выпуклых функций. Сужение на пространстве  $X_1 \times \dots \times X_n$  выпуклых функций определенных на пространстве  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n$ , сужение на пространстве  $X_1 \times \dots \times X_n$  выпуклых функций определенных на  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$   $n$ -выпуклые функции, сужение на пространстве  $X_1 \times \dots \times X_n$  сублинейных функций определенных на пространстве  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$   $n$ -сублинейная функция. Если  $F(v, x_1, \dots, x_n)$  выпуклая функция на  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n$ , то  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = F(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$   $n$ -выпуклая функция на  $X_1 \times \dots \times X_n$ . Если  $F_1(v)$  выпуклая функция на  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ , то  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = F_1(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$   $n$ -выпуклая функция на  $X_1 \times \dots \times X_n$ . Если  $g(v)$  сублинейная функция на  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ , то  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$   $n$ -сублинейная функция на пространстве  $X_1 \times \dots \times X_n$ .

Обозначим через  $\tilde{B}(X_1 \times \dots \times X_n, R)$  векторное пространство  $n$ -линейных функций из  $X_1 \times \dots \times X_n$  в  $R$ , а через  $X'_1$  векторное пространство линейных функций из  $X_1$  в  $R$ . Пусть  $(z_1^*, \dots, z_n^*) \in X'_1 \times \dots \times X'_n$ ,  $x^* \in \tilde{B}(X_1 \times \dots \times X_n, R)$ ,  $\alpha \in R$ . Функцию  $b(x_1, \dots, x_n) = x^*(x_1, \dots, x_n) + z_1^*(x_1) + \dots + z_n^*(x_n) + \alpha$  назовем алгебраически  $n(A)$ -аффинным, где  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Функция  $F: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$ , являющаяся поточечной верхней границей некоторого семейства алгебраически  $n(A)$ -аффинных функций, является  $n$ -выпуклой функцией.

Понятия  $n$ -сублинейных и  $n$ -выпуклых функций введены автором в [1-3]. Изучения  $n$ -выпуклых функций и  $n$ -выпуклых множеств посвящена монография [4]. Многие статьи и препринта автора посвящены в этой тематике (см. [4] и [5]). Но класс  $n$ -выпуклых функций очень широк. Поэтому еще имеются не исследованные задачи.

$n$ -сублинейные функции особенно важны при исследовании субдифференцируемости

$n$ -выпуклых и высокого порядка субдифференцируемости невыпуклых функций. В исследовании  $n$ -субдифференцируемости  $n$ -выпуклых функций важную роль играет понятие  $n$ -сопряженных функций. В работе получены разные и эквивалентные определения

$n$ -субдифференциала  $n$ -выпуклых функций. Хотя некоторые свойства  $n$ -выпуклых функций ближе к свойствам выпуклых функций, но возникают существенные трудные задачи. Отметим, что  $n$ -выпуклых функций и  $n$ -выпуклых множества имеют тесные связи. В работе показано, что функция  $f$   $n$ -выпукла тогда и только тогда, когда  $n - \text{erf}$   $n$ -выпуклое множество.

Ряд свойств  $n$ -выпуклых множеств изучен в [4]. В [4] изучены также  $n$ -субдифференцируемость  $n$ -выпуклых операторов.

В [6] и [7] изучалась также  $n$ -субдифференцируемость  $n$ -выпуклых функций.

В изучении субдифференцируемости выпуклых функций существенную роль играет теорема Хермандера [8-11], а в исследование  $n$ -субдифференцируемости  $n$ -выпуклых функций существенную роль играет понятие тензорного произведения [12], [13].

В исследовании необходимое условие высокого порядка для негладких задач оптимизации существенно используется  $n$ -субдифференцируемость  $n$ -сублинейных функций.

Работа состоит из четырех пунктов. В п.2 исследуется  $n$ -субдифференцируемость  $n$ -выпуклых функций и изучены ряд их свойств. В п.2 продолжается исследование свойств  $n$ -сопряженных функций и получены эквивалентные определения  $n$ -субдифференциала  $n$ -выпуклых функций в терминах  $n$ -сопряженных функций. В п.3 изучается ряд свойств  $n$ -выпуклых множеств. В п.3 также рассматривается выпуклая оболочка  $n$ -выпуклых функций. Доказаны теоремы об  $n(B)$ -отделимости  $n$ -выпуклых множеств и точек. Рассматриваются о характеристизации полунепрерывных снизу  $n(A)$ -выпуклых функций. В п.4 исследуется  $n$ -субдифференцируемость канонических  $n$ -выпуклых функций и изучены ряд их свойств. Рассматриваются о характеристизации полунепрерывных снизу канонических  $n$ -выпуклых функций.

## 2. Исследование свойств $n$ -выпуклых функций

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  действительные банаховы пространства. Множество всех непрерывных  $n$ -линейных функций из  $X_1 \times \dots \times X_n$  в  $\mathbb{R}$  обозначим через  $B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R})$ .

Функцию  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  назовем (строго, сильно)  $n$ -выпуклой, если для любого  $i$  и любых  $y_j \in X_j$ , соответствующих всем  $j \neq i$ , функции  $x_i \rightarrow f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  (строго, сильно) выпуклые при  $x_i \in X_i$  и  $i = 1, \dots, n$ .

Функцию  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  назовем (строго, сильно)  $n$ -вогнутой, если для любого  $i$  и любых  $y_j \in X_j$ , соответствующих всем  $j \neq i$ , функции  $x_i \rightarrow f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  (строго, сильно) вогнутые при  $x_i \in X_i$  и  $i = 1, \dots, n$ .

В определениях сильно  $n$ -выпуклых и сильно  $n$ -вогнутых функций предполагается, что  $X_1, \dots, X_n$  гильбертово пространство.

Множество  $C \subset X_1 \times \dots \times X_n$  называется  $n$ -выпуклой, если для любого  $(y_1, \dots, y_{i-1}, y_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \in C$  множества  $\{x_i \in X_i : (y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \in C\}$  выпуклы при  $i = 1, \dots, n$  или из  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^1, y_{i+1}, \dots, y_n) \in C$ ,  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^2, y_{i+1}, \dots, y_n) \in C$  и  $\alpha \in [0, 1]$  следует, что  $(y_1, \dots, y_{i-1}, (\alpha x_i^1 + (1-\alpha)x_i^2), y_{i+1}, \dots, y_n) \in C$  при  $i = 1, \dots, n$ .

Если  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$   $n$ -выпуклая функция, то  $\text{dom} f = \{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n : f(x_1, \dots, x_n) < +\infty\}$   $n$ -выпуклое множество.

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  действительные линейные пространства. Обозначим через  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  пространство формальных линейных комбинаций (с действительными коэффициентами) элементов из  $X_1 \times \dots \times X_n$ . Употребляя запись  $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$  вместо  $l(x_1, \dots, x_n)$  для элементов естественного базиса в  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ , рассмотрим множество  $L \subset X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  элементов любого из следующих видов:

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes (x_i^1 + x_i^2) \otimes x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_n - x_1 \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes x_i^1 \otimes x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_n - x_1 \otimes \dots \otimes x_{i-1} \otimes x_i^2 \otimes x_{i+1} \otimes \dots \otimes x_n;$$

$$i = \overline{1, n}, \quad \lambda_1 y_1 \otimes \dots \otimes \lambda_n y_n - \lambda_1 \dots \lambda_n y_1 \otimes \dots \otimes y_n$$

взятых по всем  $x_i, x_i^1, x_i^2, y_i \in X_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ ,  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . Введем обозначения  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  для факторпространства  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n / \text{Lin } L$ . Если  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , то класс эквивалентности, содержащий  $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ , обозначим  $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$ , т.е. обозначим через  $x_1 \otimes \dots \otimes x_n$  класс смежности  $x_1 \otimes \dots \otimes x_n + \text{Lin } L$ .

Если  $X_1, \dots, X_n$  – банахово пространство, то считаем, что пространство  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  снабжено топологией, порожденной относительно нормы



$$\|v\|_p = \inf \left\{ \sum_{i=1}^m \|x_1^i\| \cdots \|x_n^i\| : v = \sum_{i=1}^m x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i, x_j^i \in X_j, j = \overline{1, n}, m \in \mathbb{N} \right\},$$

т.е.  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  снабжено проективной топологией (см.[7, 12]). Далее, будем отождествлять (см.[12])  $(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)^*$  и  $B(X_1 \times \cdots \times X_n, R)$ . Из предложения 3.21[12] следует, что  $\|x_1 \otimes \cdots \otimes x_n\| = \|x_1\| \cdots \|x_n\|$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ .

Если  $f \in A(X_1 \times \cdots \times X_n)$ , то существует множество индексов  $T$  такое, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1, \dots, x_n) + z_{1t}^*(x_1) + \cdots + z_{nt}^*(x_n) + \alpha_t)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ , где  $x_t^* \in B(X_1 \times \cdots \times X_n, R)$ ,  $z_{it}^* \in X_i^*$  при  $i = 1, \dots, n$  и  $\alpha_t \in R$ . Ясно, что

$$g(v, x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} \left( \sum_{i=1}^k x_t^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + z_{1t}^*(x_1) + \cdots + z_{nt}^*(x_n) + \alpha_t \right),$$

где  $v = \sum_{i=1}^k x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , принадлежит  $\Gamma_0(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \times X_1 \times \cdots \times X_n)$ .

Отметим, что если  $f \in A(X_1 \times \cdots \times X_n)$ , то существует множество  $S \subset B(X_1 \times \cdots \times X_n, R) \times (X_1 \times \cdots \times X_n)^* \times R$  такое, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{(x^*, z^*, \alpha) \in S} (x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) + \alpha)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ ,  $z^*(x_1, \dots, x_n) = z^*(x_1) + \cdots + z^*(x_n)$ .

Обратно, если  $F \in \Gamma_0(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \times X_1 \times \cdots \times X_n)$ , то из предложения 3.1[10, с.24] следует, что функция  $F(v, x_1, \dots, x_n)$  является поточечной верхней гранью некоторого непустого семейства аффинных

функций вида  $b(v, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k x^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + z_1^*(x_1) + \cdots + z_n^*(x_n) + \alpha$ , где

$x^* \in B(X_1 \times \cdots \times X_n, R)$ ,  $z_i^* \in X_i^*$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $\alpha \in R$  и  $v = \sum_{i=1}^k x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$ . Поэтому существует множество

индексов  $T$  такое, что

$$F(v, x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} b_t(v, x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} \left( \sum_{i=1}^k x_t^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + z_{1t}^*(x_1) + \cdots + z_{nt}^*(x_n) + \alpha_t \right).$$

Отсюда следует, что

$$\varphi(x_1, \dots, x_n) = F(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1, \dots, x_n) + z_{1t}^*(x_1) + \cdots + z_{nt}^*(x_n) + \alpha_t)$$

принадлежит в  $A(X_1 \times \cdots \times X_n)$ , т.е.  $\varphi \in A(X_1 \times \cdots \times X_n)$ . Отметим, что функция вида

$$q(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1, \dots, x_n) + z_{1t}^*(x_1) + \cdots + z_{nt}^*(x_n))$$
 называется канонической  $n(A)$ -сублинейной.

Отметим, что если  $F(v, x_1, \dots, x_n)$  является поточечной верхней гранью некоторого непустого семейства аффинных функций вида  $b(v, x_1, \dots, x_n)$ , то из предложения 3.1[10] следует, что

$F(v, x_1, \dots, x_n)$  выпуклая полунепрерывная снизу функция на  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \times X_1 \times \cdots \times X_n$ .

**Лемма 2.1.** Если  $F(v, x_1, \dots, x_n)$  выпуклая функция на  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \times X_1 \times \cdots \times X_n$ , то  $\varphi(x_1, \dots, x_n) = F(x_1 \otimes \cdots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n)$   $n$ -выпуклая функция на  $X_1 \times \cdots \times X_n$ .

**Доказательство.** Если  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ ,  $(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \in X_1 \times \cdots \times X_n$ ,

$\alpha \in [0, 1]$  и  $i = 1, \dots, n$ , то

$$\begin{aligned} \varphi(y_1, \dots, y_{i-1}, \alpha x_i + (1-\alpha)z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) &= \\ &= F(y_1 \otimes \cdots \otimes y_{i-1} \otimes (\alpha x_i + (1-\alpha)z_i) \otimes y_{i+1} \otimes \cdots \otimes y_n, y_1, \dots, y_{i-1}, (\alpha x_i + (1-\alpha)z_i), y_{i+1}, \dots, y_n) = \\ &= F(\alpha(y_1 \otimes \cdots \otimes y_{i-1} \otimes x_i \otimes y_{i+1} \otimes \cdots \otimes y_n, y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) + \\ &+ (1-\alpha)(y_1 \otimes \cdots \otimes y_{i-1} \otimes z_i \otimes y_{i+1} \otimes \cdots \otimes y_n, y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n)) \leq \\ &\leq \alpha F(y_1 \otimes \cdots \otimes y_{i-1} \otimes x_i \otimes y_{i+1} \otimes \cdots \otimes y_n, y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) + \\ &+ (1-\alpha)F(y_1 \otimes \cdots \otimes y_{i-1} \otimes z_i \otimes y_{i+1} \otimes \cdots \otimes y_n, y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) = \\ &= \alpha \varphi(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) + (1-\alpha) \varphi(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n), \end{aligned}$$

т.е.  $x_i \rightarrow \varphi(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  выпуклая функция при  $i = 1, \dots, n$ . Лемма доказана.

Отсюда также следует, что если  $F \in \Gamma_0(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \times X_1 \times \cdots \times X_n)$ , то

$\varphi(x_1, \dots, x_n) = F(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n)$   $n$ -выпуклая функция на  $X_1 \times \dots \times X_n$ .

Если  $F \in \Gamma_0(X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n)$ , то положив  $\varphi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) = F(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $\varphi(v, x_1, \dots, x_n) = +\infty$  при  $(v, x_1, \dots, x_n) \notin (X_1 \otimes \dots \otimes X_n, x_1, \dots, x_n)$ ,  $(v, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n$  рассмотрим выпуклую оболочку функции  $\varphi$ . Так как  $\text{ep}(\text{conv } \varphi) = \text{conv } \text{ep } \varphi$ , то из теоремы 1.6.1 [14, с.162] следует, что

$$\begin{aligned} \text{conv } \varphi(v, x_1, \dots, x_n) &= \tilde{F}(v, x_1, \dots, x_n) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i \varphi(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i) : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, (v, x_1, \dots, x_n) = \right. \\ &= \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i), (x_1^i, \dots, x_n^i) \in X_1 \times \dots \times X_n, k \in \mathbb{N} \} = \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i F(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i) : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, (v, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i), \right. \\ &(x_1^i, \dots, x_n^i) \in X_1 \times \dots \times X_n, k \in \mathbb{N} \} \geq \inf \left\{ F\left(\sum_{i=1}^k \alpha_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i)\right) : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, \right. \\ &(v, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i), (x_1^i, \dots, x_n^i) \in X_1 \times \dots \times X_n, k \in \mathbb{N} \} = F(v, x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

при  $(v, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n$ . Отсюда имеем, что

$$\begin{aligned} \tilde{F}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) &\geq F(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) && \text{при} \\ (x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) &\in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n. && \text{Так как} \\ \tilde{F}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) &\leq F(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) && \text{при } (x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n, \\ \text{то} &&& \tilde{F}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) = F(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) && \text{при} \\ (x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) &\in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n. \end{aligned}$$

Если  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ , то положим

$$n\text{-ep } f = \{((x_1, \alpha_1), \dots, (x_n, \alpha_n)) \in (X_1 \times \mathbb{R}) \times \dots \times (X_n \times \mathbb{R}) : f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha_1 \dots \alpha_n\}.$$

**Лемма 2.2.** Функция  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$   $n$ -выпуклая функция тогда и только тогда, когда множество  $n\text{-ep } f$   $n$ -выпуклое множество.

**Доказательство.** Пусть  $f$   $n$ -выпуклая функция. Покажем, что  $n\text{-ep } f$   $n$ -выпуклое множество. Если  $((y_1, \alpha_1), \dots, (y_{i-1}, \alpha_{i-1}), (x_i, \beta_1), (y_{i+1}, \alpha_{i+1}), \dots, (y_n, \alpha_n)) \in n\text{-ep } f$ ,

$((y_1, \alpha_1), \dots, (y_{i-1}, \alpha_{i-1}), (z_i, \beta_2), (y_{i+1}, \alpha_{i+1}), \dots, (y_n, \alpha_n)) \in n\text{-ep } f$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ , то покажем, что

$((y_1, \alpha_1), \dots, (y_{i-1}, \alpha_{i-1}), \lambda(x_i, \beta_1) + (1-\lambda)(z_i, \beta_2), (y_{i+1}, \alpha_{i+1}), \dots, (y_n, \alpha_n)) \in n\text{-ep } f$ . Так как

$$f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \beta_1 \alpha_{i+1} \dots \alpha_n, \quad f(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \beta_2 \alpha_{i+1} \dots \alpha_n,$$

то имеем

$$\begin{aligned} f(y_1, \dots, y_{i-1}, \lambda x_i + (1-\lambda)z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) &\leq \lambda f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) + (1-\lambda)f(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq \\ &\leq \lambda \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \beta_1 \alpha_{i+1} \dots \alpha_n + (1-\lambda) \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} \beta_2 \alpha_{i+1} \dots \alpha_n = \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} (\lambda \beta_1 + (1-\lambda) \beta_2) \alpha_{i+1} \dots \alpha_n, \end{aligned}$$

т.е.  $f(y_1, \dots, y_{i-1}, \lambda x_i + (1-\lambda)z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq \alpha_1 \dots \alpha_{i-1} (\lambda \beta_1 + (1-\lambda) \beta_2) \alpha_{i+1} \dots \alpha_n$ . Отсюда следует, что

$$((y_1, \alpha_1), \dots, (y_{i-1}, \alpha_{i-1}), \lambda(x_i, \beta_1) + (1-\lambda)(z_i, \beta_2), (y_{i+1}, \alpha_{i+1}), \dots, (y_n, \alpha_n)) \in n\text{-ep } f.$$

Пусть  $n\text{-ep } f$   $n$ -выпуклое множество. Покажем, что  $f$   $n$ -выпуклая функция, т.е. покажем, что для любого  $i$  и любых  $y_j \in X_j$ , соответствующих всем  $j \neq i$ , функции  $x_i \rightarrow f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  выпуклые при  $i = 1, \dots, n$ .

Пусть  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n), (y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \in \text{dom } f$  и  $\lambda \in [0, 1]$ . Так как  $((y_1, 1), \dots, (y_{i-1}, 1), (x_i, f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)), (y_{i+1}, 1), \dots, (y_n, 1)) \in n\text{-ep } f$

$((y_1, 1), \dots, (y_{i-1}, 1), (z_i, f(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n)), (y_{i+1}, 1), \dots, (y_n, 1)) \in n\text{-ep } f$ , то имеем, что

$$\begin{aligned} ((y_1, 1), \dots, (y_{i-1}, 1), \lambda(x_i, f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)) + \\ + (1-\lambda)(z_i, f(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n)), (y_{i+1}, 1), \dots, (y_n, 1)) \in n\text{-ep } f \end{aligned}$$

при  $\lambda \in [0, 1]$ . Поэтому

$$f(y_1, \dots, y_{i-1}, \lambda x_i + (1-\lambda)z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq \lambda f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) + (1-\lambda)f(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

при  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n), (y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \in \text{dom } f$  и  $\lambda \in [0, 1]$ . Если  $\lambda \in (0, 1)$ , то случай  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \notin \text{dom } f$  или  $(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \notin \text{dom } f$ , а также

$(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \notin \text{dom } f$  и  $(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \notin \text{dom } f$  очевиден. Получим, что функции  $x_i \rightarrow f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  выпуклые при  $i = 1, \dots, n$ . Лемма доказана.

Из леммы 2.2 следует, что  $n$ -выпуклую функцию можно определять следующим образом: функция  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  называется  $n$ -выпуклой, если  $n - \text{ep } f$   $n$ -выпуклое множество.

Отметим, что если  $((y_1, \alpha_1), \dots, (y_n, \alpha_n)) \in n - \text{ep } f$ , то  $f(y_1, \dots, y_n) \leq \alpha_1 \cdots \alpha_n$ , т.е.  $(y_1, \dots, y_n, \alpha_1 \cdots \alpha_n) \in \text{ep } f = \{(x_1, \dots, x_n, \lambda) \in (X_1 \times \dots \times X_n) \times \mathbb{R} : f(x_1, \dots, x_n) \leq \lambda\}$ . Поэтому можно положить  $n - E(f) = (x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in (X_1 \times \dots \times X_n) \times (\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}) : f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha_1 \cdots \alpha_n$ .

**Лемма 2.3.** Функция  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$   $n$ -выпуклая функция тогда и только тогда, когда для любого  $(y_1, \dots, y_n) \in \text{dom } f$  множество  $\text{ep } f(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n) = \{(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n, \lambda) \in (X_1 \times \dots \times X_n) \times \mathbb{R} : f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq \lambda\}$  выпуклое.

**Доказательство.** Пусть  $f$   $n$ -выпуклая функция и  $(y_1, \dots, y_n) \in \text{dom } f$ . Покажем, что  $\text{ep } f(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$  выпуклое множество. Если  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n, \lambda_1) \in \text{ep } f$ ,  $(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n, \lambda_2) \in \text{ep } f$  и  $v \in [0, 1]$ , то покажем, что  $v(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n, \lambda_1) + (1-v)(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n, \lambda_2) \in \text{ep } f$ .

Так как  $f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq \lambda_1$ ,  $f(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq \lambda_2$ , то имеем, что  $f(v(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) + (1-v)(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n)) \leq v f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) + (1-v)f(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq v \lambda_1 + (1-v) \lambda_2$ , т.е.  $f(y_1, \dots, y_{i-1}, v x_i + (1-v) z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq v \lambda_1 + (1-v) \lambda_2$ . Отсюда следует, что  $(y_1, \dots, y_{i-1}, v x_i + (1-v) z_i, y_{i+1}, \dots, y_n, v \lambda_1 + (1-v) \lambda_2) \in \text{ep } f$ .

Получим, что  $\text{ep } f(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$  выпуклое множество.

Пусть  $\text{ep } f(y_1, \dots, y_{i-1}, y_{i+1}, \dots, y_n)$  выпуклое множество. Покажем, что  $f$   $n$ -выпуклая функция, т.е. покажем, что функции  $x_i \rightarrow f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  выпуклые при  $i = 1, \dots, n$ .

Пусть  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n), (y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \in \text{dom } f$  и  $v \in [0, 1]$ . Так как  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n, f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)), (y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n, f(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n))$  принадлежит в  $\text{ep } f$ , то имеем, что

$$(y_1, \dots, y_{i-1}, v x_i + (1-v) z_i, y_{i+1}, \dots, y_n, v f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) + (1-v) f(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n)) \in \text{ep } f$$

при  $v \in [0, 1]$ . Поэтому

$$f(y_1, \dots, y_{i-1}, v x_i + (1-v) z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq v f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) + (1-v) f(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$$

при  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n), (y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \in \text{dom } f$ ,  $v \in [0, 1]$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Случай

$(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \notin \text{dom } f$  или  $(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \notin \text{dom } f$ , а также  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \notin \text{dom } f$  и  $(y_1, \dots, y_{i-1}, z_i, y_{i+1}, \dots, y_n) \notin \text{dom } f$  очевиден. Получим, что  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$   $n$ -выпуклая функция. Лемма доказана.

Пусть  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  и  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \text{dom } f$ . Положим

$$D f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \{(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times X_1^* \times \dots \times X_n^* :$$

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - x_1^*(\bar{x}_1) - \dots - x_n^*(\bar{x}_n) \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n\},$$

$$D_n f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \{x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) : \exists (x_1^*, \dots, x_n^*) \in X_1^* \times \dots \times X_n^*, \text{ что}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - x_1^*(\bar{x}_1) - \dots - x_n^*(\bar{x}_n) \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n\},$$

$$S(f) = \{(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*, c) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times X_1^* \times \dots \times X_n^* \times \mathbb{R} : f(x_1, \dots, x_n) \geq x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n) + c \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n\}.$$

**Лемма 2.4.** Если  $(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in D f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , то  $x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) + x_i^* \in \partial_{x_i} f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  при  $i = 1, \dots, n$ .

**Доказательство.** Если  $(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in D f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , то по определению имеем, что

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + x_i^*(x_i) - x_i^*(\bar{x}_i)$$

при  $x_i \in X_i$ . Поэтому

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i - \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) + x_i^*(x_i - \bar{x}_i)$$

при  $x_i \in X_i$ . Отсюда следует, что  $x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \cdot, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) + x_i^* \in \partial_{x_i} f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  при  $i = 1, \dots, n$ .

Лемма доказана.

Если  $(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in Df(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , то

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x_1^*(x_1) + \dots + x_{i-1}^*(x_{i-1}) + \\ + x_{i+1}^*(x_{i+1}) + \dots + x_n^*(x_n) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - x_1^*(\bar{x}_1) - \dots - x_n^*(\bar{x}_n)$$

при  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Поэтому

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) - x_1^*(x_1) - \dots - x_{i-1}^*(x_{i-1}) - x_{i+1}^*(x_{i+1}) - \dots - x_n^*(x_n) \geq \\ \geq f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - x_1^*(\bar{x}_1) - \dots - x_n^*(\bar{x}_n)$$

при  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

Из определения  $S(f)$  следует, что

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq \sup_{(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*, c) \in S(f)} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n) + c\}$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

Обозначим через  $B_{X_i}$  единичные замкнуты шары в  $X_i$  при  $i = 1, \dots, n$ , т.е.

$B_{X_i} = \{x \in X_i : \|x\| \leq 1\}$  и обозначим через  $\text{conv} M$  выпуклую оболочку множества  $M$ .

Если  $T$  множество,  $f_t : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -выпуклая функция при  $t \in T$ , то из предложения 2.2 [15, с. 27] следует, что  $f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} f_t(x_1, \dots, x_n)$  также  $n$ -выпуклая функция.

**Лемма 2.5.** Пусть  $T$  непустое компактное множество,  $f_t : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -выпуклая функция при  $t \in T$ , существует  $\delta > 0$  такое, что функция  $t \rightarrow f_t(x_1, \dots, x_n)$  полунепрерывно сверху при  $(x_1, \dots, x_n) \in (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + (\delta B_{X_1} \times \dots \times \delta B_{X_n})$ ,  $f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} f_t(x_1, \dots, x_n)$ ,

$$T(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \{t \in T : f_t(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)\}. \text{ Тогда } \text{conv} \bigcup_{t \in T(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} Df_t(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \subset Df(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

**Доказательство.** По условию имеем, что  $T(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  непусто. Если  $t \in T(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и

$$(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in Df_t(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \text{ то} \\ f_t(x_1, \dots, x_n) - f_t(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n) - \\ - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - x_1^*(\bar{x}_1) - \dots - x_n^*(\bar{x}_n) \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Поэтому

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n) - \\ - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - x_1^*(\bar{x}_1) - \dots - x_n^*(\bar{x}_n) \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n,$$

т.е.  $(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in Df(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Поэтому  $Df_t(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \subset Df(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Отсюда следует, что  $\text{conv} \bigcup_{t \in T(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)} Df_t(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \subset Df(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Лемма доказана.

Пусть  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  и  $x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R})$ ,  $z^* = (z_1^*, \dots, z_n^*) \in X_1^* \times \dots \times X_n^*$ . Положим

$$f^*(x^*, z^*) = \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)\}.$$

**Лемма 2.6.**  $(x^*, z^*) \in Df(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  тогда и только тогда, когда

$$f^*(x^*, z^*) + f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \quad (1)$$

**Доказательство.** Если  $(x^*, z^*) \in Df(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , то

$$x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Поэтому

$$x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \max_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)\},$$

т.е.  $f^*(x^*, z^*) + f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Наоборот, если (1) удовлетворяется, то

$$\sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)\} = x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Поэтому  $x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) \leq x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , т.е.

$$f(x_1, \dots, x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - z^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Поэтому  $(x^*, z^*) \in \text{Df}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Лемма доказана.

Пусть  $g: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  и  $\text{dom } g \neq \emptyset$ . Так как для каждой  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  отображение  $(x^*, z^*) \rightarrow x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n)$  линейная функция на  $B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$ , то из определения  $g^*(x^*, z^*)$  следует, что  $(x^*, z^*) \rightarrow g^*(x^*, z^*)$  выпуклая функция. Положим

$$g^{**}(x_1, \dots, x_n) = \sup_{(x^*, z^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - g^*(x^*, z^*)\}.$$

Ясно, что  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - g^*(x^*, z^*)$   $n$ -аффинная функция. Поэтому из предложения 3.1 [10] вытекает, что  $(x_1, \dots, x_n) \rightarrow g^{**}(x_1, \dots, x_n)$   $n$ -выпуклая функция. Из определения  $g^*(x^*, z^*)$  получим, что  $g^*(x^*, z^*) \geq x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - g(x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  и  $(x^*, z^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$ . Поэтому  $g^{**}(x_1, \dots, x_n) \leq g(x_1, \dots, x_n)$  для любого  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

Если  $(v, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n$ , то положим

$$\tilde{g}^{**}(v, x_1, \dots, x_n) = \sup_{(x^*, z^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*} \{u(v) + z^*(x_1, \dots, x_n) - g^*(x^*, z^*)\},$$

где  $u(v) = \sum_{i=1}^k x^*(x_1^i, \dots, x_n^i)$  при  $v = \sum_{i=1}^k x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i$ . Ясно, что  $\tilde{g}^{**}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) = g^{**}(x_1, \dots, x_n)$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Из предложения 1.5 и 2.2 [15] следует, что  $\tilde{g}^{**}: X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  полунепрерывная снизу выпуклая функция.

**Теорема 2.1.** Если  $g(\cdot) \in \Gamma_0(X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n)$  и  $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , то  $f^{**}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$  для любого  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

**Доказательство.** Пусть  $u \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_n)^* = B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R})$ , где  $u(v) = \sum_{i=1}^k x^*(x_1^i, \dots, x_n^i)$  при

$v = \sum_{i=1}^k x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i$ ,  $k \in \mathbb{N}$ . Положив

$$\bar{g}(v, x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} f(x_1, \dots, x_n) & \text{если } (v, x_1, \dots, x_n) = (x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n, \\ +\infty & \text{в других случаях} \end{cases}$$

имеем

$$\begin{aligned} \bar{g}^*(u, z^*) &= \sup_{(v, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n} \{u(v) + z^*(x_1, \dots, x_n) - \bar{g}(v, x_1, \dots, x_n)\} = \\ &= \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)\} = \\ &= f^*(x^*, z^*) \leq \sup_{(v, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n} \{u(v) + z^*(x_1, \dots, x_n) - g(v, x_1, \dots, x_n)\} = g^*(x^*, z^*) \end{aligned}$$

при  $(x^*, z^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$ . Поэтому

$$\begin{aligned} f^{**}(x_1, \dots, x_n) &= \sup_{(x^*, z^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - f^*(x^*, z^*)\} \geq \\ &\geq g^{**}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) = \sup_{(x^*, z^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - g^*(x^*, z^*)\}, \end{aligned}$$

где  $z^*(x_1, \dots, x_n) = z_1^*(x_1) + \dots + z_n^*(x_n)$ . Тогда получим, что

$$f(x_1, \dots, x_n) \geq f^{**}(x_1, \dots, x_n) \geq g^{**}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Отсюда имеем, что  $f^{**}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Теорема доказана.

**Теорема 2.2.** Если  $q: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ , то  $(\bar{x}^*, \bar{z}^*) \in \text{Dq}(\bar{x}, \bar{y})$  тогда и только тогда, когда

$(\bar{u}(\cdot), \bar{z}^*) \in \partial \tilde{q}^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и  $\tilde{q}^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , где

$$\bar{u}(v) = \sum_{i=1}^k \bar{x}^*(x_1^i, \dots, x_n^i) \text{ при } v = \sum_{i=1}^k x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, \quad k \in \mathbb{N}.$$

**Доказательство.**

Пусть

$$\tilde{q}^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \quad \text{и}$$

$(\bar{u}(\cdot), \bar{z}^*) \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_n)^* \times (X_1 \times \dots \times X_n)^* = B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$  принадлежит

$\partial \tilde{q}^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Тогда

$$\tilde{q}^{**}(v, x_1, \dots, x_n) - \tilde{q}^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq \bar{u}^*(v) - \bar{u}^*(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) + \bar{z}^*(x_1, \dots, x_n) - \bar{z}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

при  $(v, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n$ . Если учесть, что

$q(x_1, \dots, x_n) \geq q^{**}(x_1, \dots, x_n) = \tilde{q}^{**}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n)$ , то по условию получим

$$q(x_1, \dots, x_n) - q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq \bar{u}^*(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) - \bar{u}^*(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) + \bar{z}^*(x_1, \dots, x_n) - \bar{z}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Поэтому  $(\bar{x}^*, \bar{z}^*) \in Dq(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , где  $\bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) = \bar{u}^*(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при

$(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Обратно, если  $(\bar{x}^*, \bar{z}^*) \in Dq(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , то

$$q(x_1, \dots, x_n) - q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq \bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) + \bar{z}^*(x_1, \dots, x_n) - \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{z}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \quad \text{при}$$

$(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Отсюда следует, что

$$\begin{aligned} & \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - q(x_1, \dots, x_n)\} + q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leq \\ & \leq \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - \bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) - \\ & - \bar{z}^*(x_1, \dots, x_n)\} + \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \bar{z}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \end{aligned}$$

Поэтому

$$q^*(x^*, z^*) + q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leq \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \bar{z}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \begin{cases} 0: (x^*, z^*) = (\bar{x}^*, \bar{z}^*), \\ +\infty: (x^*, z^*) \neq (\bar{x}^*, \bar{z}^*) \end{cases}$$

при  $(x^*, z^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$ . Если  $v \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ ,  $v = \sum_{i=1}^k x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i$ , то положив

$$u(v) = \sum_{i=1}^k x^*(x_1^i, \dots, x_n^i) \text{ и } \bar{u}(v) = \sum_{i=1}^k \bar{x}^*(x_1^i, \dots, x_n^i) \text{ имеем, что}$$

$$\begin{aligned} & \sup_{(x^*, z^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*} \{u(v) + z^*(x_1, \dots, x_n) - q^*(x^*, z^*) - q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)\} \geq \\ & \geq \bar{u}(v) + \bar{z}^*(x_1, \dots, x_n) - \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{z}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \end{aligned}$$

т.е.

$$\tilde{q}^{**}(v, x_1, \dots, x_n) - q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq \bar{u}(v) + \bar{z}^*(x_1, \dots, x_n) - \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{z}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

при  $(v, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n$ . Взяв  $(v, x_1, \dots, x_n) = (\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , получим

$$\tilde{q}^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq \bar{u}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) - \bar{z}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{z}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0,$$

т.е.  $\tilde{q}^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Так как  $\tilde{q}^{**}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) = q^{**}(x_1, \dots, x_n)$  и

$q^{**}(x_1, \dots, x_n) \leq q(x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , то получим, что

$\tilde{q}^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leq q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Поэтому  $\tilde{q}^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Тогда

$\tilde{q}^{**}(v, x_1, \dots, x_n) - \tilde{q}^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq \bar{u}(v) + \bar{z}^*(x_1, \dots, x_n) - \bar{u}^*(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) - \bar{z}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  при

$(v, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n$ , т.е.  $(\bar{u}(\cdot), \bar{z}^*) \in \partial \tilde{q}^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Теорема доказана.

Если  $z^* \in (X_1 \times \dots \times X_n)^*$ , то положив

$$\begin{aligned} \partial_n f_{z^*}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) &= \{x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) : f(x_1, \dots, x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x^*(x_1, \dots, x_n) + \\ &+ z^*(x_1, \dots, x_n) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - z^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n\} \end{aligned}$$

получим, что  $D_n f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \bigcup_{z^* \in (X_1 \times \dots \times X_n)^*} \partial_n f_{z^*}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ .

Возникает вопрос, когда

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*, c) \in S(f)} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n) + c\}$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Если



$$f(x_1, \dots, x_n) = f^{**}(x_1, \dots, x_n) = \sup_{(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n) -$$

$$- f^*(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*)\} = \sup_{(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in \text{dom } f^*} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n) - f^*(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*)\},$$

то  $\text{co}\{(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*), c\} \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^* \times R : (x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in \text{dom } f^*,$

$$c = -f^*(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in S(f).$$

### 3. Характеризации п-выпуклых множеств и п-выпуклых функций

Множество  $C \subset X_1 \times \dots \times X_n$  называется Bb-выпуклой (строго Bb-выпуклой), если для любого  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin C$  существует функция  $(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$  такая, что

$$x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + x_1^*(\bar{x}_1) + \dots + x_n^*(\bar{x}_n) \geq x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n)$$

$$(x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + x_1^*(\bar{x}_1) + \dots + x_n^*(\bar{x}_n) > x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n))$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in C$ .

Множество  $C \subset X_1 \times \dots \times X_n$  называется сильно Bb-выпуклой, если для любого

$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin C$  существуют функция  $(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что  $x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + x_1^*(\bar{x}_1) + \dots + x_n^*(\bar{x}_n) - \varepsilon > x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in C$ .

**Лемма 3.1.** Строго Bb-выпуклое множество п-выпукло.

**Доказательство.** Пусть  $C$  строго Bb-выпуклое множество,  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^1, y_{i+1}, \dots, y_n) \in C$ ,

$(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^2, y_{i+1}, \dots, y_n) \in C$  и существует  $\lambda \in (0, 1)$ , что  $(y_1, \dots, y_{i-1}, (\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2), y_{i+1}, \dots, y_n) \notin C$ . Тогда по определению строго Bb-выпуклого множества существует  $(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$  такой, что

$$x^*(y_1, \dots, y_{i-1}, (\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2), y_{i+1}, \dots, y_n) + x_1^*(y_1) + \dots + x_{i-1}^*(y_{i-1}) + x_i^*(\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2) + x_{i+1}^*(y_{i+1}) + \dots +$$

$$+ x_n^*(y_n) > x^*(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^1, y_{i+1}, \dots, y_n) + x_1^*(y_1) + \dots + x_{i-1}^*(y_{i-1}) + x_i^*(x_i^1) + x_{i+1}^*(y_{i+1}) + \dots + x_n^*(y_n),$$

$$x^*(y_1, \dots, y_{i-1}, (\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2), y_{i+1}, \dots, y_n) + x_1^*(y_1) + \dots + x_{i-1}^*(y_{i-1}) + x_i^*(\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2) + x_{i+1}^*(y_{i+1}) + \dots +$$

$$+ x_n^*(y_n) > x^*(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^2, y_{i+1}, \dots, y_n) + x_1^*(y_1) + \dots + x_{i-1}^*(y_{i-1}) + x_i^*(x_i^2) + x_{i+1}^*(y_{i+1}) + \dots + x_n^*(y_n).$$

Отсюда вытекает, что

$$x^*(y_1, \dots, y_{i-1}, (1-\lambda)x_i^2, y_{i+1}, \dots, y_n) + x_i^*((1-\lambda)x_i^2) > x^*(y_1, \dots, y_{i-1}, (1-\lambda)x_i^1, y_{i+1}, \dots, y_n) + x_i^*((1-\lambda)x_i^1),$$

$$x^*(y_1, \dots, y_{i-1}, \lambda x_i^1, y_{i+1}, \dots, y_n) + x_i^*(\lambda x_i^1) > x^*(y_1, \dots, y_{i-1}, \lambda x_i^2, y_{i+1}, \dots, y_n) + x_i^*(\lambda x_i^2),$$

т.е.

$$x^*(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^2, y_{i+1}, \dots, y_n) + x_i^*(x_i^2) > x^*(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^1, y_{i+1}, \dots, y_n) + x_i^*(x_i^1),$$

$$x^*(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^1, y_{i+1}, \dots, y_n) + x_i^*(x_i^1) > x^*(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^2, y_{i+1}, \dots, y_n) + x_i^*(x_i^2).$$

Получим противоречие. Лемма доказана.

Отметим, что пересечение п-выпуклых множеств п-выпукло.  $C \subset X_1 \times \dots \times X_n$  п-выпуклое

множество тогда и только тогда, когда  $\delta_C(x_1, \dots, x_n) = \begin{cases} 0: (x_1, \dots, x_n) \in C, \\ +\infty: (x_1, \dots, x_n) \notin C \end{cases}$  п-выпуклая функция.

**Лемма 3.2.** Если  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  п-выпуклая функция,  $\alpha \in R$  и  $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n : f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha\} \neq \emptyset$ , то  $C$  п-выпуклое множество.

**Доказательство.** Если  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^1, y_{i+1}, \dots, y_n) \in C$ ,  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^2, y_{i+1}, \dots, y_n) \in C$  при  $i = 1, \dots, n$ , то  $f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^1, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq \alpha$ ,  $f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^2, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq \alpha$ . Поэтому если  $\lambda \in [0, 1]$ , то имеем, что

$$f(y_1, \dots, y_{i-1}, (\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2), y_{i+1}, \dots, y_n) \leq \lambda f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^1, y_{i+1}, \dots, y_n) +$$

$$+ (1-\lambda)f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^2, y_{i+1}, \dots, y_n) \leq \lambda\alpha + (1-\lambda)\alpha = \alpha.$$

Отсюда следует, что  $(y_1, \dots, y_{i-1}, (\lambda x_i^1 + (1-\lambda)x_i^2), y_{i+1}, \dots, y_n) \in C$  при  $i = 1, \dots, n$ . Лемма доказана.

Если  $x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$ , то  $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n : x^*(x_1, \dots, x_n) = d\}$  п-выпуклое множество.

**Лемма 3.3.** Если  $f \in A(X_1 \times \dots \times X_n)$  и  $f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1, \dots, x_n) + z_{t_1}^*(x_1) + \dots + z_{t_n}^*(x_n) + c_t)$ ,

где  $(x_t^*, z_{t_1}^*, \dots, z_{t_n}^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$ ,  $c_t \in R$ ,  $\alpha \in R$  и

$C = \{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n : f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha\} \neq \emptyset$ , то  $C$  сильно  $\forall b$ -выпуклое множество.

**Доказательство.** Если  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin C$ , то  $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > \alpha$ . Предположим, что число  $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  конечно. Положив  $\varepsilon = \frac{f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \alpha}{3}$  имеем, что  $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - 2\varepsilon > \alpha$ . По условию существует  $\tau \in T$  такое, что

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \varepsilon < x_\tau^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z_{1_\tau}^*(\bar{x}_1) + \dots + z_{n_\tau}^*(\bar{x}_n) + c_\tau.$$

Поэтому

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - 2\varepsilon < x_\tau^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z_{1_\tau}^*(\bar{x}_1) + \dots + z_{n_\tau}^*(\bar{x}_n) + c_\tau - \varepsilon.$$

Тогда получим, что

$$\begin{aligned} x_\tau^*(x_1, \dots, x_n) + z_{1_\tau}^*(x_1) + \dots + z_{n_\tau}^*(x_n) + c_\tau &\leq f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha < f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - 2\varepsilon < \\ < x_\tau^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z_{1_\tau}^*(\bar{x}_1) + \dots + z_{n_\tau}^*(\bar{x}_n) + c_\tau - \varepsilon \end{aligned}$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in C$  и  $t \in T$ . Отсюда следует, что

$$x_\tau^*(x_1, \dots, x_n) + z_{1_\tau}^*(x_1) + \dots + z_{n_\tau}^*(x_n) < x_\tau^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z_{1_\tau}^*(\bar{x}_1) + \dots + z_{n_\tau}^*(\bar{x}_n) - \varepsilon$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in C$ , т.е.  $(x_\tau^*, z_{1_\tau}^*, \dots, z_{n_\tau}^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$  сильно отделяет точку  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и множество  $C$ .

Если  $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = +\infty$ , то  $\sup_{t \in T} (x_t^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z_{1_t}^*(\bar{x}_1) + \dots + z_{n_t}^*(\bar{x}_n) + c_t) = +\infty$ . Поэтому существует

$\tau \in T$  такое, что  $x_\tau^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z_{1_\tau}^*(\bar{x}_1) + \dots + z_{n_\tau}^*(\bar{x}_n) + c_\tau - \varepsilon > \alpha$ . Тогда получим, что

$$x_\tau^*(x_1, \dots, x_n) + z_{1_\tau}^*(x_1) + \dots + z_{n_\tau}^*(x_n) < x_\tau^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z_{1_\tau}^*(\bar{x}_1) + \dots + z_{n_\tau}^*(\bar{x}_n) - \varepsilon$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in C$ , т.е.  $(x_\tau^*, z_{1_\tau}^*, \dots, z_{n_\tau}^*)$  сильно отделяет точку  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и множество  $C$ . Лемма доказана.

**Лемма 3.4.** Если  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R$  и  $f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1, \dots, x_n) + z_{1_t}^*(x_1) + \dots + z_{n_t}^*(x_n) + c_t)$ ,

где  $(x_t^*, z_{1_t}^*, \dots, z_{n_t}^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$ ,  $c_t \in R$ , то  $n\text{-ep } f$  сильно  $\forall b$ -выпуклое множество.

**Доказательство.** Если  $((\bar{x}_1, \bar{\alpha}_1), \dots, (\bar{x}_n, \bar{\alpha}_n)) \notin n\text{-ep } f$ , то  $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$ . Поэтому

$f(x_1, \dots, x_n) - \alpha_1 \dots \alpha_n \leq 0 < f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$  при  $((x_1, \alpha_1), \dots, (x_n, \alpha_n)) \in n\text{-ep } f$ . Пусть

$0 < 2\varepsilon < f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$  и  $\tau \in T$  такое, что  $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \varepsilon < x_\tau^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z_{1_\tau}^*(\bar{x}_1) + \dots + z_{n_\tau}^*(\bar{x}_n) + c_\tau$ . Тогда получим, что

$$\begin{aligned} x_\tau^*(x_1, \dots, x_n) + z_{1_\tau}^*(x_1) + \dots + z_{n_\tau}^*(x_n) - \alpha_1 \dots \alpha_n + c_\tau &\leq f(x_1, \dots, x_n) - \alpha_1 \dots \alpha_n < \\ < f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n - 2\varepsilon < x_\tau^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z_{1_\tau}^*(\bar{x}_1) + \dots + z_{n_\tau}^*(\bar{x}_n) + c_\tau - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n - \varepsilon \end{aligned}$$

при  $((x_1, \alpha_1), \dots, (x_n, \alpha_n)) \in n\text{-ep } f$ . Отсюда следует, что

$$x_v^*(x_1, \dots, x_n) + z_{1_v}^*(x_1) + \dots + z_{n_v}^*(x_n) - \alpha_1 \dots \alpha_n < x_v^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z_{1_v}^*(\bar{x}_1) + \dots + z_{n_v}^*(\bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n - \varepsilon$$

при  $((x_1, \alpha_1), \dots, (x_n, \alpha_n)) \in n\text{-ep } f$ , т.е.

$(x_\tau^*, z_{1_\tau}^*, \dots, z_{n_\tau}^*, -1) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^* \times B(R \times \dots \times R, R)$  сильно отделяет множество  $n\text{-ep } f$  и точку  $((\bar{x}_1, \bar{\alpha}_1), \dots, (\bar{x}_n, \bar{\alpha}_n))$ . Так как  $((\bar{x}_1, \bar{\alpha}_1), \dots, (\bar{x}_n, \bar{\alpha}_n)) \notin n\text{-ep } f$  любая точка, то  $n\text{-ep } f$  сильно  $\forall b$ -выпуклое множество. Лемма доказана.

Множество  $C \subset X_1 \times \dots \times X_n$  является  $\forall b$ -выпуклой (сильно  $\forall b$ -выпуклой), если

$\tilde{C} = \{(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1, \dots, x_n) : (x_1^i, \dots, x_n^i) \in C, (x_1, \dots, x_n) \in C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^n \lambda_i = 1\}$  выпуклое (выпуклое замкнутое) множество. Поэтому множество  $C = \{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n : f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha\}$

является  $\forall b$ -выпуклой (сильно  $\forall b$ -выпуклой), если множество

$$\{(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1, \dots, x_n) : (x_1^i, \dots, x_n^i) \in C, (x_1, \dots, x_n) \in C, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in N\}$$

выпуклое (выпуклое замкнутое) множество.

Пусть  $B_1 \subset X_1 \times \dots \times X_n$  и  $B_2 \subset X_1 \times \dots \times X_n$ . Множества  $B_1$  и  $B_2$  называются (строга)  $n(B)$ -отделимыми, если существуют  $z^* \in (X_1 \times \dots \times X_n)^*$  и  $x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$  такие, что  $(x^*, z^*) \neq 0$  и

$$x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) \geq x^*(y_1, \dots, y_n) + z^*(y_1, \dots, y_n)$$

$$(x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) > x^*(y_1, \dots, y_n) + z^*(y_1, \dots, y_n))$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in B_1$ ,  $(y_1, \dots, y_n) \in B_2$ .

Множества  $B_1$  и  $B_2$  называются сильно  $n(B)$ -отделимыми, если существуют  $z^* \in (X_1 \times \dots \times X_n)^*$ ,  $x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$  и  $\varepsilon > 0$  такие, что

$$x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) - \varepsilon \geq x^*(y_1, \dots, y_n) + z^*(y_1, \dots, y_n)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in B_1$ ,  $(y_1, \dots, y_n) \in B_2$ .

Считаем, что пространство  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n$  снабжено  $\sigma(X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n, B(X_1 \times \dots \times X_n, R) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*)$  топологией.

**Теорема 3.1.** Если  $C_1 \subset X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $\bar{C}_1 = \{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in C_1\}$ ,  $C_2 \subset X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $\bar{C}_2 = \{(y_1 \otimes \dots \otimes y_n, y_1, \dots, y_n) : (y_1, \dots, y_n) \in C_2\}$ , то множества  $C_1$  и  $C_2$   $n(B)$ -отделимы, тогда и только тогда, когда  $\text{co} \bar{C}_1$  и  $\text{co} \bar{C}_2$  отделимы.

**Доказательство.** Пусть  $C_1$  и  $C_2$   $n(B)$ -отделимы. Тогда существуют такие  $x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$  и  $z^* \in (X_1 \times \dots \times X_n)^*$ , что  $x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) \leq x^*(y_1, \dots, y_n) + z^*(y_1, \dots, y_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in C_1$  и  $(y_1, \dots, y_n) \in C_2$ , где  $u = (x^*, z^*) \neq 0$ . Поэтому имеем, что  $x^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + z^*(x_1^i, \dots, x_n^i) \leq x^*(y_1^i, \dots, y_n^i) + z^*(y_1^i, \dots, y_n^i)$  при  $(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i) \in \bar{C}_1$ ,  $(y_1^i \otimes \dots \otimes y_n^i, y_1^i, \dots, y_n^i) \in \bar{C}_2$ ,  $i = 1, \dots, k$ , где  $k \in \mathbb{N}$ . Положив  $\xi = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i)$  при  $(x_1^i, \dots, x_n^i) \in C_1$ ,  $v = \sum_{i=1}^k \alpha_i (y_1^i \otimes \dots \otimes y_n^i, y_1^i, \dots, y_n^i)$  при  $(y_1^i, \dots, y_n^i) \in C_2$ ,  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$ ,  $u(\xi) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + z^*(x_1^i, \dots, x_n^i))$  и  $u(v) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x^*(y_1^i, \dots, y_n^i) + z^*(y_1^i, \dots, y_n^i))$  (можно считать, что число  $k$  равны по представлению  $\xi$  и  $v$ ) получим, что

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i (x^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + z^*(x_1^i, \dots, x_n^i)) \leq \sum_{i=1}^k \alpha_i (x^*(y_1^i, \dots, y_n^i) + z^*(y_1^i, \dots, y_n^i)) \quad \text{при}$$

$(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i) \in \bar{C}_1$ ,  $(y_1^i \otimes \dots \otimes y_n^i, y_1^i, \dots, y_n^i) \in \bar{C}_2$ . Отсюда следует, что  $u(\xi) \leq u(v)$  при всех  $\xi \in \text{co} \bar{C}_1$  и  $v \in \text{co} \bar{C}_2$ , т.е.  $\text{co} \bar{C}_1$  и  $\text{co} \bar{C}_2$  отделимы. Обратно, если  $\text{co} \bar{C}_1$  и  $\text{co} \bar{C}_2$  отделимы, то существует функция  $u \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_n)^* \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$ ,  $u = (x^*, z^*) \neq 0$  такая, что  $u(\xi) \leq u(v)$  при

$\xi \in \text{co} \bar{C}_1$  и  $v \in \text{co} \bar{C}_2$ . Поэтому  $x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) \leq x^*(y_1, \dots, y_n) + z^*(y_1, \dots, y_n)$  при  $(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) \in \bar{C}_1$  и  $(y_1 \otimes \dots \otimes y_n, y_1, \dots, y_n) \in \bar{C}_2$ . Отсюда следует, что  $x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n) \leq x^*(y_1, \dots, y_n) + z^*(y_1, \dots, y_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in C_1$  и  $(y_1, \dots, y_n) \in C_2$ , т.е. множества  $C_1$  и  $C_2$   $n(B)$ -отделимы. Теорема доказана.

Отметим, что если  $C_1 \subset X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $\bar{C}_1 = \{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in C_1\}$ ,  $C_2 \subset X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $\bar{C}_2 = \{(y_1 \otimes \dots \otimes y_n, y_1, \dots, y_n) : (y_1, \dots, y_n) \in C_2\}$ , то аналогично проверяется, что множества  $C_1$  и  $C_2$  сильно  $n(B)$ -отделимы (строго  $n(B)$ -отделимы), тогда и только тогда, когда  $\text{co} \bar{C}_1$  и  $\text{co} \bar{C}_2$  сильно отделимы (строго отделимы).

Пусть  $C \subset X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $\bar{C} = \{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in C\}$ ,

$$D = (X_1 \times \dots \times X_n) \setminus C = \{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n : (x_1, \dots, x_n) \notin C\},$$

$$\tilde{D} = \{(y_1 \otimes \dots \otimes y_n, y_1, \dots, y_n) : (y_1, \dots, y_n) \in D\}.$$

**Лемма 3.5.** Если  $\text{co} \bar{C} \cap \tilde{D} = \emptyset$  и  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin C$ , то множество  $C$  и точка  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  сильно  $n(B)$ -отделимы.

**Доказательство.** Так как  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin C$ , то  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \tilde{D}$ . Поэтому  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin \text{co} \bar{C}$ . Тогда из теоремы 3.4[17] следует, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и  $\text{co} \bar{C}$  сильно отделимы. Поэтому точка  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и множество  $C$  сильно  $n(B)$ -отделимы. Лемма доказана.

Ясно, что если  $\text{co} \bar{C} \cap \{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n\} = \bar{C}$ , то  $\text{co} \bar{C} \cap \tilde{D} = \emptyset$ .

**Лемма 3.6.** Если  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin C$ , точка  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и  $C$  строго  $n(B)$ -отделимы, то  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin \text{co} \bar{C}$ .

**Доказательство.** Так как  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin C$  и точка  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и  $C$  строго  $n(B)$ -отделимы, то существуют функции  $z^* \in (X_1 \times \dots \times X_n)^*$  и  $x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$  такие, что  $(x^*, z^*) \neq 0$  и  $x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > x^*(x_1, \dots, x_n) + z^*(x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in C$ . Покажем, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin \text{co} \bar{C}$ . Предположим противное. Пусть  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \text{co} \bar{C}$ . Тогда существуют  $\alpha_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \alpha_i = 1$  и  $(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i) \in \bar{C}$  при  $i = 1, \dots, k$  такие, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i)$ . По условию имеем, что  $x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > x^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + z^*(x_1^i, \dots, x_n^i)$  при  $i = 1, \dots, k$ . Поэтому

$$x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + z^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > \sum_{i=1}^k \alpha_i (x^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + z^*(x_1^i, \dots, x_n^i)),$$

т.е.  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin \text{co} \bar{C}$ . Получим противоречие. Лемма доказана.

Отметим, что если  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin C$ , точка  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и  $C$  сильно  $n(B)$ -отделимы, то аналогично имеем, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin \text{co} \bar{C}$ .

Рассмотрим конкретные случаи.

**1)** Пусть  $f \in A(X_1 \times \dots \times X_n)$  и  $f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1, \dots, x_n) + z_{l_t}^*(x_1) + \dots + z_{n_t}^*(x_n) + c_t)$ ,  $k \in R$  и

$$C = \{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n : f(x_1, \dots, x_n) \leq k\} \neq \emptyset. \text{ Положим}$$

$$C^0 = \{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) : (x_1, \dots, x_n) \in C\},$$

$$f^0(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (u_t(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) + z_{l_t}^*(x_1) + \dots + z_{n_t}^*(x_n) + c_t),$$

где  $u_t(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_t^*(x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  имеем, что

$$C^0 = \{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_n) \times (X_1 \times \dots \times X_n) : f^0(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) \leq k\},$$

Положим

$$f^{00}(v, x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (u_t(v) + z_{l_t}^*(x_1) + \dots + z_{n_t}^*(x_n) + c_t),$$

где  $u_t(v) = \sum_{i=1}^k x_t^*(x_1^i, \dots, x_n^i)$  при  $v = \sum_{i=1}^k x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i$ ,  $(x_1^i, \dots, x_n^i) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Из определения

$f^{00}(v, x_1, \dots, x_n)$  следует, что  $f^{00} : (X_1 \otimes \dots \otimes X_n) \times (X_1 \times \dots \times X_n) \rightarrow R_{+\infty}$  выпуклая полунепрерывная снизу функция. Поэтому

$$C^{00} = \{(v, x_1, \dots, x_n) \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_n) \times (X_1 \times \dots \times X_n) : f^{00}(v, x_1, \dots, x_n) \leq k\}$$

выпуклое замкнутое множество. Так как  $C^0 \subset C^{00}$ , то имеем, что  $\overline{\text{co}} C^0 \subset C^{00}$ . Если

$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin C$ , то из определения  $C^0$  следует, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin C^0$ , т.е.  $f^0(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > k$ . Поэтому  $f^{00}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f^0(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > k$ . Отсюда следует, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin C^{00}$ . Тогда из теоремы 3.4[17] следует, что

$(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и  $C^{00}$  сильно отделимы. Поэтому точка  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и множество  $C$  сильно  $n(B)$ -отделимы.

**2)** Пусть  $f \in A(X_1 \times \dots \times X_n)$  и  $f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1, \dots, x_n) + z_{l_t}^*(x_1) + \dots + z_{n_t}^*(x_n) + c_t)$ ,

$$2-E(f) = C = \{(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in X_1 \times \dots \times X_n \times R \times \dots \times R : f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha_1 \dots \alpha_n\} \neq \emptyset. \text{ Положим}$$

$$C^0 = \{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n, \alpha) : (x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in C, \alpha = \alpha_1 \dots \alpha_n\},$$

$$f^0(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (u_t(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) + z_{l_t}^*(x_1) + \dots + z_{n_t}^*(x_n) + c_t),$$

где  $u_t(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = x_t^*(x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  имеем, что

$$C^0 = \{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n, \alpha) \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_n) \times (X_1 \times \dots \times X_n) \times R :$$

$$f^0(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) \leq \alpha\}.$$

Положим

$$f^{00}(v, x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (u_t(v) + z_{l_t}^*(x_1) + \dots + z_{n_t}^*(x_n) + c_t),$$

где  $u_i(v) = \sum_{i=1}^k x_i^*(x_1^i, \dots, x_n^i)$  при  $v = \sum_{i=1}^k x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i$ ,  $(x_1^i, \dots, x_n^i) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Из определения

$f^{00}(v, x_1, \dots, x_n)$  следует, что  $f^{00} : (X_1 \otimes \dots \otimes X_n) \times (X_1 \times \dots \times X_n) \rightarrow R_{+\infty}$  выпуклая полунепрерывная снизу функция. Поэтому

$$C^{00} = \{(v, x_1, \dots, x_n, \alpha) \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_n) \times (X_1 \times \dots \times X_n) \times R : f^{00}(v, x_1, \dots, x_n) \leq \alpha\}$$

выпуклое замкнутое множество. Так как  $C^0 \subset C^{00}$ , то имеем, что  $\overline{C^0} \subset C^{00}$ . Если

$(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) \notin C$ , то из определения  $C^0$  следует, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \notin C^0$ , где  $\bar{\alpha} = \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$ , т.е.  $f^0(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > \bar{\alpha}$ . Поэтому  $f^{00}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f^0(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > \bar{\alpha}$ . Отсюда следует, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \notin C^{00}$ . Тогда из теоремы 3.4[17] следует, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha})$  и  $C^{00}$  сильно отделимы. Поэтому точка  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$  и множество  $C$  сильно  $n(B)$ -отделимы.

Отметим, что если  $f_0 : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  каноническая  $n$ -выпуклая функция,  $f_1 : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  собственная полунепрерывная снизу выпуклая функция, то существуют множества индексов  $T$  и  $S$  такие, что

$$\begin{aligned} f(x_1, \dots, x_n) &= f_0(x_1, \dots, x_n) + f_1(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1, \dots, x_n) + c_t) + \\ &+ \sup_{s \in S} (z_s^*(x_1) + \dots + z_{n_s}^*(x_n) + d_s) = \sup_{t \in T, s \in S} (x_t^*(x_1, \dots, x_n) + c_t + z_{1_s}^*(x_1) + \dots + z_{n_s}^*(x_n) + d_s) \end{aligned}$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Поэтому, если

$$2 - E(f) = C = \{(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in X_1 \times \dots \times X_n \times R \times \dots \times R : f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha_1 \dots \alpha_n\} \neq \emptyset$$

и  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) \notin C$ , то точка  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n)$  и множество  $C$  сильно  $n(B)$ -отделимы.

**Лемма 3.7.** Если  $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k \in X_n$  линейно независимы,  $x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^k \in X_j$  и

$x_j^1 \neq 0, x_j^2 \neq 0, \dots, x_j^k \neq 0$  при  $j=1, \dots, n$  и  $\sum_{i=1}^k x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i = y_1 \otimes \dots \otimes y_n$ , то пары  $\{x_1^i, y_1\}$  линейно зависимы

при  $i=1, \dots, k$ , т.е. существуют числа  $\beta_i$  такие, что  $x_1^i = \beta_i y_1$  при  $i=1, \dots, k$ .

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть для некоторого  $i=1, \dots, k$  пары  $\{x_1^i, y_1\}$  линейно независимы. Тогда по лемме о биортогональном базисе (см. [9, с.25]) существует функция  $x_1^* \in X_1^*$  такая, что  $x_1^*(y_1) = 0$  и  $x_1^*(x_1^i) = 1$ . Пусть функции  $x_j^* \in X_j^*$  такие, что  $x_j^*(x_j^i) = 1$  при  $j=2, \dots, n-1$ . Также по лемме о биортогональном базисе существует функция  $x_n^* \in X_n^*$  такая, что  $x_n^*(x_n^s) = 0$  при  $s \neq i$  и  $x_n^*(x_n^i) = 1$ . Ясно, что  $(x_1^* \otimes \dots \otimes x_n^*)(x_1^i, \dots, x_n^i) = x_1^*(x_1^i) \dots x_n^*(x_n^i) = 1$ . Так как  $\sum_{i=1}^k x_1^*(x_1^i) \dots x_n^*(x_n^i) = 1$  и  $x_1^*(y_1) \dots x_n^*(y_n) = 0$ , то получим противоречие, т.е. пары  $\{x_1^i, y_1\}$  линейно зависимы при  $i=1, \dots, k$ . Поэтому существуют числа  $\beta_i$  такие, что  $x_1^i = \beta_i y_1$  при  $i=1, \dots, k$ . Лемма доказана.

Аналогично имеем, что если  $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k \in X_n$  линейно независимы,  $x_j^1, x_j^2, \dots, x_j^k \in X_j$  и  $x_j^1 \neq 0, x_j^2 \neq 0, \dots, x_j^k \neq 0$  при  $j=1, \dots, n$  и  $\sum_{i=1}^k x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i = y_1 \otimes \dots \otimes y_n$ , то пары  $\{x_j^i, y_j\}$  линейно зависимы при  $i=1, \dots, k$ ,  $j=1, \dots, n-1$ , т.е. существуют числа  $\beta_{ij}$  такие, что  $x_j^i = \beta_{ij} y_j$  при  $i=1, \dots, k$ ,  $j=1, \dots, n-1$ .

**Леммы 3.8.** Если  $f : X_1 \times X_2 \rightarrow R$  бивыпуклая, т.е. 2-выпуклая функция и

$$C^0 = \{(x_1 \otimes x_2, x_1, x_2, \alpha) \in (X_1 \otimes X_2) \times (X_1 \times X_2) \times R : f(x_1, x_2) \leq \alpha\},$$

$$\tilde{C}^{00} = \{(v, x_1, x_2, \alpha) \in X_1 \otimes X_2 \times X_1 \times X_2 \times R : (v, x_1, x_2, \alpha) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes x_2^i, x_1^i, x_2^i, \alpha_i),$$

где  $(x_1^i \otimes x_2^i, x_1^i, x_2^i, \alpha_i) \in C^0$ ,  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ ,  $k \in N$ ,  $x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^k \in X_2$  линейно независимы\},

то из соотношения  $(\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha}) \notin C^0$  следует, что  $(\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha}) \notin \tilde{C}^{00}$ .

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть существует  $(\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha}) \notin C^0$  такая, что  $(\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha}) \in \tilde{C}^{00}$ . Тогда существует  $(x_1^i \otimes x_2^i, x_1^i, x_2^i, \alpha_i) \in C^0$ ,  $k \in N$  и  $\lambda_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  такие, что

$$(\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2, \bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes x_2^i, x_1^i, x_2^i, \alpha_i). \quad \text{Отсюда имеем, что} \quad (\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes x_2^i),$$

$$(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i, x_2^i) \quad \text{и} \quad \bar{\alpha} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i.$$

Если  $x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^k \in X_2$  линейно независимы и  $(\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes x_2^i)$ , где  $\lambda_i > 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ , то из леммы 3.7 следует, что пары  $\{x_1^i, \bar{x}_1\}$  линейно зависимы при  $i = 1, \dots, k$ , т.е. существуют числа  $\beta_i$  такие, что  $x_1^i = \beta_i \bar{x}_1$  при  $i = 1, \dots, k$ . Поэтому  $(\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \beta_i \bar{x}_1 \otimes x_2^i$ . Тогда получим, что  $(\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2) = \sum_{i=1}^k \bar{x}_1 \otimes \lambda_i \beta_i x_2^i = \bar{x}_1 \otimes \sum_{i=1}^k \lambda_i \beta_i x_2^i$ . Отсюда следует, что  $\bar{x}_2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i \beta_i x_2^i$ . Из равенства  $(\bar{x}_1, \bar{x}_2) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i, x_2^i)$  следует, что  $\bar{x}_2 = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_2^i$ . Так как  $x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^k \in X_2$  линейно независимы, то из равенства  $\sum_{i=1}^k \lambda_i \beta_i x_2^i = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_2^i$  следует, что  $\sum_{i=1}^k (\lambda_i \beta_i - \lambda_i) x_2^i = 0$ . Поэтому  $\lambda_i \beta_i - \lambda_i = 0$ . Отсюда следует, что  $\beta_i = 1$  при  $i = 1, \dots, k$ . Тогда имеем, что

$$\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_1^i, x_2^i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(\bar{x}_1, x_2^i) \geq f(\bar{x}_1, \sum_{i=1}^k \lambda_i x_2^i) = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2) > \bar{\alpha}.$$

Получим противоречие. Лемма доказана.

Легко проверяется, что если  $x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^k \in X_2$  линейно независимы и  $x_1^i \neq 0$  при  $i = 1, \dots, k$ , то  $x_1^i \otimes x_2^i$  линейно независимы при  $i = 1, \dots, k$ .

**Лемма 3.9.** Если  $f \in A(X_1 \times \dots \times X_n)$  и существует множество индексов  $T$  такое, что

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1, \dots, x_n) + z_{1t}^*(x_1) + \dots + z_{nt}^*(x_n) + c_t)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , где  $x_t^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$ ,  $z_{it}^* \in X_i^*$  при  $i = 1, \dots, n$  и  $c_t \in R$ , и

$$C^0 = \{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n, \alpha) \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_n) \times (X_1 \times \dots \times X_n) \times R : f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha\},$$

$$C^{00} = \{(v, x_1, \dots, x_n, \alpha) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n \times R : (v, x_1, \dots, x_n, \alpha) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i, \alpha_i), \text{ где } (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i, \alpha_i) \in C^0, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in N\},$$

то из соотношения  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \notin C^0$  следует, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \notin C^{00}$ .

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть существует  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \notin C^0$  такая, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \in C^{00}$ . Тогда существует  $(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i, \alpha_i) \in C^0$ ,  $k \in N$  и  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  такие, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, x_1^i, \dots, x_n^i, \alpha_i)$ . Отсюда имеем, что

$$(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i), \quad (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i, \dots, x_n^i) \quad \text{и} \quad \bar{\alpha} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i. \quad \text{Так как}$$

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1, \dots, x_n) + z_{1t}^*(x_1) + \dots + z_{nt}^*(x_n) + c_t), \quad \text{то}$$

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_1^i, \dots, x_n^i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + z_{1t}^*(x_1^i) + \dots + z_{nt}^*(x_n^i) + c_t) \geq \\ &\geq \sup_{t \in T} \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_t^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + z_{1t}^*(x_1^i) + \dots + z_{nt}^*(x_n^i) + c_t) = \sup_{t \in T} (x_t^*(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i) + \\ &+ z_{1t}^*(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_1^i) + \dots + z_{nt}^*(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_n^i) + c_t) = \sup_{t \in T} (x_t^*(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) + \\ &+ z_{1t}^*(\bar{x}_1) + \dots + z_{nt}^*(\bar{x}_n) + c_t) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > \bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Получим противоречие. Лемма доказана.

Если  $q_0 : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R$  неотрицательная четная  $n$ -сублинейная функция,

$q_1 : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R$  неотрицательная сублинейная функция, то положим  $\bar{q}_0(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = q_0(x_1, \dots, x_n)$  и

$$\bar{C} = \{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n : \bar{q}_0(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) + q_1(x_1, \dots, x_n) \leq 1\}.$$



Положим

$$p_C(x_1, \dots, x_n) = p_{\bar{C}}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n) = \inf \left\{ \alpha : \frac{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, x_1, \dots, x_n)}{\alpha} \in \bar{C}, \alpha > 0 \right\},$$

рассмотрим аналог функции Минковского, где  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Тогда получим, что

$$\begin{aligned} p_C(x_1, \dots, x_n) &= \inf \{ \alpha : \bar{q}_0(\frac{1}{\alpha} x_1 \otimes \dots \otimes x_n) + q_1(\frac{x_1, \dots, x_n}{\alpha}) \leq 1, \alpha > 0 \} = \\ &= \inf \{ \alpha : \bar{q}_0(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) + q_1(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha, \alpha > 0 \} = q_0(x_1, \dots, x_n) + q_1(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

Если  $\bar{C} = \{(v, x_1, \dots, x_n) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times X_1 \times \dots \times X_n\}$  выпуклое множество и  $(0, 0, \dots, 0) \in \text{int } \bar{C}$ ,

то положив  $p_{\bar{C}}(v, x_1, \dots, x_n) = \inf \left\{ \alpha : \frac{(v, x_1, \dots, x_n)}{\alpha} \in \bar{C}, \alpha > 0 \right\}$ , из теоремы 1.35[17] имеем, что

$p_{\bar{C}}(v, x_1, \dots, x_n)$  сублинейная конечная функция.

Пусть  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ . Положим

$$n-E(f) = \{(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in X_1 \times \dots \times X_n \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} : f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha_1 \dots \alpha_n\}.$$

Если  $f(x_1, \dots, x_n) = f^{**}(x_1, \dots, x_n)$ , то

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in \text{dom } f^*} \{x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n) - f^*(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*)\}$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Кроме того, если  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$ , то из леммы 3.4 следует, что

$n-E(f)$  сильно  $\mathbb{B}b$ -выпуклое множество. Докажем обратное утверждение.

**Теорема 3.2.** Если  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$   $n$ -выпуклая полунепрерывная снизу функция,

$n-E(f)$  строго  $\mathbb{B}b$ -выпуклое множество, то  $f(x_1, \dots, x_n) = f^{**}(x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

**Доказательство.** Если  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) \notin n-E(f)$ , то  $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$ . Так как  $n-E(f)$  строго  $\mathbb{B}b$ -выпуклое множество, то существуют  $(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times (X_1 \times \dots \times X_n)^*$  и  $b \in \mathbb{R}$ , что

$$x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \dots + x_n^*(x_n) - b\alpha_1 \dots \alpha_n < x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + x_1^*(\bar{x}_1) + \dots + x_n^*(\bar{x}_n) - b\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$$

при  $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in n-E(f)$ . Положив  $(x_1, \dots, x_n) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и  $\alpha_1 \dots \alpha_n = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  имеем, что

$$x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + x_1^*(\bar{x}_1) + \dots + x_n^*(\bar{x}_n) - bf(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) < x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + x_1^*(\bar{x}_1) + \dots + x_n^*(\bar{x}_n) - b\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n,$$

т.е.  $b(f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n) > 0$ . Отсюда вытекает, что  $b > 0$ . Тогда имеем, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{b} x^*(x_1, \dots, x_n) + \frac{1}{b} x_1^*(x_1) + \dots + \frac{1}{b} x_n^*(x_n) - \alpha_1 \dots \alpha_n < \\ < \frac{1}{b} x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \frac{1}{b} x_1^*(\bar{x}_1) + \dots + \frac{1}{b} x_n^*(\bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n \end{aligned}$$

при  $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in n-E(f)$ . Положив  $\alpha_1 \dots \alpha_n = f(x_1, \dots, x_n)$ ,  $\bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{b} x^*(x_1, \dots, x_n)$ ,

$$\bar{x}_1^*(x_1) = \frac{1}{b} x_1^*(x_1), \dots, \bar{x}_n^*(x_n) = \frac{1}{b} x_n^*(x_n) \text{ имеем, что}$$

$$\bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) + \bar{x}_1^*(x_1) + \dots + \bar{x}_n^*(x_n) - f(x_1, \dots, x_n) < \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \bar{x}_1^*(\bar{x}_1) + \dots + \bar{x}_n^*(\bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n} \{ \bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) + \bar{x}_1^*(x_1) + \dots + \bar{x}_n^*(x_n) - f(x_1, \dots, x_n) \} \leq \\ \leq \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \bar{x}_1^*(\bar{x}_1) + \dots + \bar{x}_n^*(\bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n, \end{aligned}$$

т.е.  $f^*(\bar{x}^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_n^*) \leq \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \bar{x}_1^*(\bar{x}_1) + \dots + \bar{x}_n^*(\bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$ . Отсюда имеем, что

$$(\bar{x}^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_n^*) \in \text{dom } f^*$$

и

$$\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n \leq \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \bar{x}_1^*(\bar{x}_1) + \dots + \bar{x}_n^*(\bar{x}_n) - f^*(\bar{x}^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_n^*) \leq f^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n).$$

Получим, что  $\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n \leq f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leq f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Следовательно,  $f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ .

Теорема доказана.

**Теорема 3.3.** Если  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  собственная  $n$ -выпуклая полунепрерывная снизу функция,

$n-E(f)$  сильно  $\mathbb{B}b$ -выпуклое множество, то  $f(x_1, \dots, x_n) = f^{**}(x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

**Доказательство.** Если  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) \notin n-E(f)$ , то  $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > \bar{\alpha}_1 \cdots \bar{\alpha}_n$ . Так как  $n-E(f)$  сильно  $\mathbb{B}b$ -выпуклое множество, то существуют  $(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in B(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathbb{R}) \times (X_1 \times \cdots \times X_n)^*$ ,  $b \in \mathbb{R}$  и  $\varepsilon > 0$ , что

$$x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \cdots + x_n^*(x_n) - b\alpha_1 \cdots \alpha_n \leq x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + x_1^*(\bar{x}_1) + \cdots + x_n^*(\bar{x}_n) - b\bar{\alpha}_1 \cdots \bar{\alpha}_n - \varepsilon$$

при  $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1 \cdots \alpha_n) \in n-E(f)$ . Положив  $(x_1, \dots, x_n) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \text{dom } f$  и  $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \leq \alpha_1 \cdots \alpha_n$  имеем

$$x^*(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) + x_1^*(\tilde{x}_1) + \cdots + x_n^*(\tilde{x}_n) - b\alpha_1 \cdots \alpha_n \leq x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + x_1^*(\bar{x}_1) + \cdots + x_n^*(\bar{x}_n) - b\bar{\alpha}_1 \cdots \bar{\alpha}_n - \varepsilon.$$

Отсюда при  $\alpha_1 \cdots \alpha_n \rightarrow +\infty$  имеем, что  $b \geq 0$ .

Если  $b > 0$ , то аналогично доказательству теоремы 3.2 имеем, что  $\frac{1}{b}(x^*, x_1^*, \dots, x_n^*) \in \text{dom } f^*$

и  $f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Также аналогично доказательству теоремы 3.2 имеем, что  $b > 0$  при  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \text{dom } f$ .

Пусть  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin \text{dom } f$ . Тогда, если  $b > 0$ , то имеем, что  $f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Если

$b = 0$ , то  $x^*(x_1, \dots, x_n) + x_1^*(x_1) + \cdots + x_n^*(x_n) \leq x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + x_1^*(\bar{x}_1) + \cdots + x_n^*(\bar{x}_n) - \varepsilon$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{dom } f$ . Возьмем  $(\bar{x}^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_n^*) \in \text{dom } f^*$ . Тогда

$$f^*(\bar{x}^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_n^*) \geq \bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) + \bar{x}_1^*(x_1) + \cdots + \bar{x}_n^*(x_n) - f(x_1, \dots, x_n)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{dom } f$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) + \bar{x}_1^*(x_1) + \cdots + \bar{x}_n^*(x_n) + \mu x^*(x_1, \dots, x_n) + \mu(x_1^*(x_1) + \cdots + x_n^*(x_n)) - \\ - f(x_1, \dots, x_n) \leq f^*(\bar{x}^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_n^*) + \mu x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \mu(x_1^*(\bar{x}_1) + \cdots + x_n^*(\bar{x}_n)) - \mu \varepsilon \end{aligned}$$

при  $\mu > 0$ . Отсюда следует

$$f^*(\bar{x}^* + \mu x^*, \bar{x}_1^* + \mu x_1^*, \dots, \bar{x}_n^* + \mu x_n^*) \leq f^*(\bar{x}^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_n^*) + \mu x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \mu(\bar{x}_1^*(x_1) + \cdots + \bar{x}_n^*(x_n)) - \mu \varepsilon,$$

которую можно записать в виде

$$\begin{aligned} \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \bar{x}_1^*(\bar{x}_1) + \cdots + \bar{x}_n^*(\bar{x}_n) + \mu \varepsilon - f^*(\bar{x}^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_n^*) \leq (\bar{x}^* + \mu x^*)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \\ + (\bar{x}_1^* + \mu x_1^*)(\bar{x}_1) + \cdots + (\bar{x}_n^* + \mu x_n^*)(\bar{x}_n) - f^*(\bar{x}^* + \mu x^*, \bar{x}_1^* + \mu x_1^*, \dots, \bar{x}_n^* + \mu x_n^*) \leq f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \end{aligned}$$

Подставив  $\mu = \frac{a + f^*(\bar{x}^*, \bar{x}_1^*, \dots, \bar{x}_n^*) - \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{x}_1^*(\bar{x}_1) - \cdots - \bar{x}_n^*(\bar{x}_n)}{\varepsilon}$  отсюда имеем, что

$a \leq f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  при достаточно больших  $a$ . Поэтому  $f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = +\infty$ . Теорема доказана.

Если  $n-E(f)$  строго  $\mathbb{B}b$ -выпуклое множество, то функцию  $f: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  назовем  $n(A)$ -выпуклой.

Другие варианты теоремы 3.2 и 3.3 доказаны в [4, с. 96].

#### 4. Исследование свойств канонических $n$ -выпуклых функций

В п.4 исследуется  $n$ -субдифференцируемость канонических  $n$ -выпуклых функций и изучается ряд их свойств. Аффинная непрерывная функция на  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  - это функция вида  $v \rightarrow u(v) + c$ , где  $u$  - непрерывная линейная функция на  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ , т.е.  $u \in (X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)^*$  и  $c \in \mathbb{R}$ . Совокупность собственных функций  $g: X_1 \otimes \cdots \otimes X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ , каждая из которых является поточечной верхней гранью некоторого семейства непрерывных аффинных функций, обозначается через  $\Gamma_0(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)$ . Из определения имеем, что все функции  $g \in \Gamma_0(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)$  выпуклы и полунепрерывны снизу. Верно и обратное (см. [10, с.24]), если  $g$  собственная выпуклая и полунепрерывная снизу функция из  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$  в  $\mathbb{R}_{+\infty}$ , то  $g \in \Gamma_0(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)$ .

Если  $x^* \in B(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , то функции  $b(x_1, \dots, x_n) = x^*(x_1, \dots, x_n) + c$  назовем  $n$ -аффинным. Множество всех  $n$ -аффинных функций из  $X_1 \times \cdots \times X_n$  в  $\mathbb{R}$  обозначим  $Ba(X_1 \times \cdots \times X_n)$ . Совокупность собственных функций  $f: X_1 \times \cdots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ , каждая из которых является поточечной верхней гранью некоторого семейства  $n$ -аффинных функций обозначим через  $AB(X_1 \times \cdots \times X_n)$ . Если

$x^* \in B(X_1 \times \cdots \times X_n, \mathbb{R})$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , то ясно, что  $\sum_{i=1}^k x^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + c$ , где  $v = \sum_{i=1}^k x_1^i \otimes \cdots \otimes x_n^i$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , аффинная функция на  $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$ . Поэтому множество функций, которые являются поточечной верхней гранью некоторого непустого семейства непрерывных аффинных функций вида  $\sum_{i=1}^k x^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + c$  совпадает с  $\Gamma_0(X_1 \otimes \cdots \otimes X_n)$ .

Из определения немедленно следует, что все функции  $f \in AB(X_1 \times \dots \times X_n)$   $n$ -выпуклы и полунепрерывны снизу.

Если  $g(\cdot) \in \Gamma_0(X_1 \otimes \dots \otimes X_n)$  и  $f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , то функцию  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  назовем канонической  $n$ -выпуклой. Ясно, что класс канонической  $n$ -выпуклой функции совпадает с классом  $AB(X_1 \times \dots \times X_n)$ . Если  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  каноническая  $n$ -выпуклая функция, то для любого  $i$  и любых  $y_j \in X_j$ , соответствующих всем  $j \neq i$ , функции  $x_i \rightarrow f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  выпуклые при  $x_i \in X_i$  и  $i = 1, \dots, n$ ,  $f(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_1 \dots \alpha_n x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$ .

В частности отсюда имеем, что  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  четно и  $f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(0, \dots, 0)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

Если для любого  $i$  и любых  $y_j \in X_j$ , соответствующих всем  $j \neq i$ , функции  $x_i \rightarrow f(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i, y_{i+1}, \dots, y_n)$  выпуклые при  $x_i \in X_i$  и  $i = 1, \dots, n$ , и  $f(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_1 \dots \alpha_n x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  и  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in R$ , то функцию  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  назовем простой  $n$ -выпуклой.

Если  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  простая  $n$ -выпуклая функция, то  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  четно и

$$f(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) = f(0, \dots, 0) \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n.$$

Пусть  $X_1, \dots, X_n$  действительные банаховы пространства,  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  и  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \text{dom } f$ . Положим

$$\begin{aligned} \partial_n f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) &= \{x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R) : f(x_1, \dots, x_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq \\ &\geq x^*(x_1, \dots, x_n) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n\}. \end{aligned}$$

**Лемма 4.1.** Если  $x^* \in \partial_n f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , то  $x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \cdot, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) \in \partial_{x_i} f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  при  $i = 1, \dots, n$ .

**Доказательство.** Если  $x^* \in \partial_n f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , то по определению имеем, что

$$f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

при  $x_i \in X_i$ . Поэтому  $f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, x_i - \bar{x}_i, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n)$  при  $x_i \in X_i$ . Отсюда следует, что  $x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{i-1}, \cdot, \bar{x}_{i+1}, \dots, \bar{x}_n) \in \partial_{x_i} f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  при  $i = 1, \dots, n$ . Лемма доказана.

**Теорема 4.1.** Если  $q : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$ , то  $x^* \in \partial_n q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  тогда и только тогда, когда  $u(\cdot) \in \partial q^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n)$  и  $q^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) = q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , где  $u(v) = \sum_{i=1}^k x^*(x_1^i, \dots, x_n^i)$  при

$$v = \sum_{i=1}^k x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, \quad k \in N.$$

**Доказательство.** Пусть  $q^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) = q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  и  $y^* \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_n)^* = B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$  принадлежит  $\partial q^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n)$ . Тогда  $q^{**}(v) - q^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) \geq y^*(v) - y^*(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n)$  при  $v \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ . Если учесть, что  $q(x_1, \dots, x_n) \geq q^{**}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$ , то по условию получим

$$q(x_1, \dots, x_n) - q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq y^*(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) - y^*(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Поэтому  $x^* \in \partial_n q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ , где  $x^*(x_1, \dots, x_n) = y^*(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при

$$(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n. \text{ Обратно, если } x^* \in \partial_n q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n), \text{ то}$$

$$q(x_1, \dots, x_n) - q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq x^*(x_1, \dots, x_n) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Отсюда вытекает, что

$$\begin{aligned} &\sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n} \{y^*(x_1, \dots, x_n) - q(x_1, \dots, x_n)\} + q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leq \\ &\leq \sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n} \{y^*(x_1, \dots, x_n) - x^*(x_1, \dots, x_n)\} + x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \end{aligned}$$

$$\text{Поэтому } q^*(y^*) + q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leq x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \begin{cases} 0 : y^* = x^* \\ +\infty : y^* \neq x^* \end{cases}$$

при  $y^* \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_n)^* = B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$ .

Если  $v \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ ,  $v = \sum_i x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i$ , то положив  $\tilde{u}(v) = \sum_{i=1}^k y^*(x_1^i, \dots, x_n^i)$  и  $u(v) = \sum_{i=1}^k x^*(x_1^i, \dots, x_n^i)$ ,

где  $k \in \mathbb{N}$ , имеем, что  $\sup_{y^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R})} \{\tilde{u}(v) - q^*(y^*) - q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)\} \geq u(v) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ ,

т.е.  $q^{**}(v) - q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq u(v) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  при  $v \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ . Взяв  $v = \bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n$ , получим

$$q^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) - q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \geq u(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) - x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = 0,$$

т.е.  $q^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) \geq q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Из определения  $q^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n)$  вытекает, что

$$q^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) \leq q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \text{ Поэтому } q^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) = q(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \text{ Тогда}$$

$$q^{**}(v) - q^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) \geq u(v) - u(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) \text{ при } v \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n, \text{ т.е. } u(\cdot) \in \partial q^{**}(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n).$$

Теорема доказана.

Множества  $B_1, B_2 \subset X_1 \times \dots \times X_n$  называются  $n$ -отделимыми, если существует  $x^* \neq 0$ ,  $x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R})$  такой, что и  $x^*(x_1, \dots, x_n) \geq x^*(y_1, \dots, y_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in B_1$ ,  $(y_1, \dots, y_n) \in B_2$ .

Аналогично теореме 3.1 доказывается следующая теорема.

**Теорема 4.2.** Пусть  $C_1 \subset X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $C_2 \subset X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $\bar{C}_1 = \{x_1 \otimes \dots \otimes x_n : (x_1, \dots, x_n) \in C_1\}$ ,  $\bar{C}_2 = \{y_1 \otimes \dots \otimes y_n : (y_1, \dots, y_n) \in C_2\}$ . Множества  $C_1$  и  $C_2$   $n$ -отделимы, тогда и только тогда, когда  $\text{co}\bar{C}_1$  и  $\text{co}\bar{C}_2$  отделимы.

**Лемма 4.2.** Если  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  собственная простая  $n$ -выпуклая функция и

$$C^0 = \{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, \alpha) \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_n) \times \mathbb{R} : f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha\},$$

$$\tilde{C}^{00} = \{(v, \alpha) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, \alpha_i) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times \mathbb{R} : (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, \alpha_i) \in C^0,$$

$$\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in \mathbb{N}, x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k \in X_n \text{ линейно независимы}\},$$

то из соотношения  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \notin C^0$  следует, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \notin \tilde{C}^{00}$ .

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть существует  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \notin \tilde{C}^{00}$  такая,

что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \in \tilde{C}^{00}$ . Тогда существует  $(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, \alpha_i) \in C^0$ ,  $k \in \mathbb{N}$  и  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  такие, что

$$(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, \alpha_i). \text{ Отсюда имеем, что } (\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i) \text{ и}$$

$$\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i.$$

Так как  $x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^k \in X_n$  линейно независимы и  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i)$ , где

$$\lambda_i > 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, \text{ то из леммы 3.7 следует, что пары } \{x_j^i, \bar{x}_j\} \text{ линейно зависимы при } i = 1, \dots, k,$$

$j = 1, \dots, n-1$ , т.е. существуют числа  $\beta_{ij}$  такие, что  $x_j^i = \beta_{ij} \bar{x}_j$  при  $i = 1, \dots, k$ ,  $j = 1, \dots, n-1$ . Поэтому

$$(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (\beta_{i1} \bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \beta_{i,n-1} \bar{x}_{n-1} \otimes x_n^i). \text{ Тогда получим, что}$$

$$(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) = \sum_{i=1}^k \bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_{n-1} \otimes \lambda_i \beta_{i1} \dots \beta_{i,n-1} x_n^i.$$

Отсюда следует, что  $\bar{x}_n = \sum_{i=1}^k \lambda_i \beta_{i1} \dots \beta_{i,n-1} x_n^i$  (см.[4,с.43]). Тогда имеем, что

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_1^i, \dots, x_n^i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(\beta_{i1} \bar{x}_1, \dots, \beta_{i,n-1} \bar{x}_{n-1}, x_n^i) = \\ &= \sum_{i=1}^k \lambda_i f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \beta_{i1} \dots \beta_{i,n-1} x_n^i) \geq f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \sum_{i=1}^k \lambda_i \beta_{i1} \dots \beta_{i,n-1} x_n^i) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{n-1}, \bar{x}_n) > \bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Получим противоречие. Лемма доказана.

Аналогично лемме 4.2 доказывается следующая лемма.

**Лемма 4.3.** Если  $f : X_1 \times X_2 \rightarrow R_{+\infty}$  четная простая бивыпуклая функция и

$$C^0 = \{(x_1 \otimes x_2, \alpha) \in (X_1 \otimes X_2) \times R : f(x_1, x_2) \leq \alpha\},$$

$$\tilde{C}^{00} = \{(v, \alpha) \in X_1 \otimes X_2 \times R : (v, \alpha) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes x_2^i, \alpha_i), \text{ где } (x_1^i \otimes x_2^i, \alpha_i) \in C^0,$$

$$\lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in N, \text{ или } x_2^1, x_2^2, \dots, x_2^k \in X_2 \text{ линейно независимы,}$$

$$\text{или } x_2^2, \dots, x_2^k \in X_2 \text{ линейно независимы, а } x_2^1, x_2^2 \in X_2 \text{ линейно зависимы,}$$

то из соотношения  $(\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2, \bar{\alpha}) \notin C^0$  следует, что  $(\bar{x}_1 \otimes \bar{x}_2, \bar{\alpha}) \notin \tilde{C}^{00}$ .

**Лемма 4.4.** Если  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  каноническая  $n$ -выпуклая функция и

$$C^0 = \{(x_1 \otimes \dots \otimes x_n, \alpha) \in (X_1 \otimes \dots \otimes X_n) \times R : f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha\},$$

$$C^{00} = \{(v, \alpha) \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times R : (v, \alpha) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, \alpha_i),$$

$$\text{где } (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, \alpha_i) \in C^0, \lambda_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1, k \in N\},$$

то из соотношения  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \notin C^0$  следует, что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \notin C^{00}$ .

**Доказательство.** Предположим противное. Пусть существует  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \notin C^0$  такая,

что  $(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{\alpha}) \in C^{00}$ . Тогда существует  $(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, \alpha_i) \in C^0$ ,  $k \in N$  и  $\lambda_i \geq 0$ ,  $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$  такие, что

$$(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n, \bar{\alpha}) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i, \alpha_i). \text{ Отсюда имеем, что } (\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) = \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i) \text{ и}$$

$$\bar{\alpha} = \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i. \text{ Так как } f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty} \text{ каноническая } n\text{-выпуклая функция, то существует множе-}$$

ство индексов  $T$  таких, что  $f(x_1, \dots, x_n) = \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1, \dots, x_n) + c_t)$ . Поэтому

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} &= \sum_{i=1}^k \lambda_i \alpha_i \geq \sum_{i=1}^k \lambda_i f(x_1^i, \dots, x_n^i) = \sum_{i=1}^k \lambda_i \sup_{t \in T} (x_t^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + c_t) \geq \\ &\geq \sup_{t \in T} \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_t^*(x_1^i, \dots, x_n^i) + c_t) = \sup_{t \in T} \sum_{i=1}^k \lambda_i (x_t^*(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i) + c_t) = \\ &= \sup_{t \in T} (x_t^*(\sum_{i=1}^k \lambda_i x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i) + c_t) = \sup_{t \in T} (x_t^*(\bar{x}_1 \otimes \dots \otimes \bar{x}_n) + c_t) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > \bar{\alpha}. \end{aligned}$$

Получим противоречие. Лемма доказана.

Если  $f : X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$ , то положим

$$\tilde{f}(v) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i f(x_1^i, \dots, x_n^i) : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, v = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i), (x_1^i, \dots, x_n^i) \in X_1 \times \dots \times X_n, k \in N \right\}.$$

Отметим, что если  $X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  наделено проективной топологией, то  $(X_1 \otimes \dots \otimes X_n)^* = B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$  (см.[12]).

**Лемма 4.5.** Если  $g : X_1 \otimes \dots \otimes X_n \rightarrow R_{+\infty}$  собственная выпуклая функция и

$f(x_1, \dots, x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , то  $\tilde{f}(v) \geq g(v)$  при  $v \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$  и  $\tilde{f}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

**Доказательство.** Так как  $g : X_1 \otimes \dots \otimes X_n \rightarrow R_{+\infty}$  выпуклая функция, то имеем, что

$$\tilde{f}(v) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k \alpha_i g(x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i) : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, v = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i), (x_1^i, \dots, x_n^i) \in X_1 \times \dots \times X_n, k \in N \right\} \geq$$

$$\geq \inf \left\{ g \left( \sum_{i=1}^k \alpha_i x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i \right) : \alpha_i \geq 0, \sum_{i=1}^k \alpha_i = 1, v = \sum_{i=1}^k \alpha_i (x_1^i \otimes \dots \otimes x_n^i), (x_1^i, \dots, x_n^i) \in X_1 \times \dots \times X_n, k \in N \right\} = g(v)$$

при  $v \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ , т.е.  $\tilde{f}(v) \geq g(v)$  при  $v \in X_1 \otimes \dots \otimes X_n$ . Поэтому  $\tilde{f}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \geq g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Из определения  $\tilde{f}(v)$  следует, что  $\tilde{f}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) \leq g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $X_1 \times \dots \times X_n$ . Тогда получим, что  $\tilde{f}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n) = g(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Лемма доказана.

Если  $C \subset X_1 \times \dots \times X_n$   $n$ -выпуклое множество и  $(0, \dots, 0) \in \text{int } C$ , то положив

$$p_C(x_1, \dots, x_n) = \inf \left\{ \alpha_1 \dots \alpha_n : \left( \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n} \right) \in C, \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0 \right\},$$

$$q_C(x_1, \dots, x_n) = \inf \left\{ \alpha_1 \dots \alpha_n : \left( \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n} \right) \in C, \alpha_1 \dots \alpha_n > 0 \right\},$$

рассмотрим аналог функции Минковского, где  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Ясно, что

$$q_C(x_1, \dots, x_n) \leq p_C(x_1, \dots, x_n) \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n \text{ и если } C \text{ четно, т.е. из}$$

$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \in C$  следует, что  $(x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \in C$ , то

$$q_C(x_1, \dots, x_n) = p_C(x_1, \dots, x_n) \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n, \text{ где } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ и } i < j.$$

Из определения  $p_C(x_1, \dots, x_n)$  следует, что  $p_C(x_1, \dots, x_n) \leq 1$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in C$  и  $p_C(x_1, \dots, x_n) \geq 0$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

**Лемма 4.6.** Если  $C$   $n$ -выпуклое множество,  $(0, \dots, 0) \in \text{int } C$  и условие  $\left( \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n} \right) \in C$

выполняется в том и только в том случае, когда  $\left( x_1, \dots, \frac{x_i}{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \dots, x_n \right) \in C$  при  $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$ ,

$i = 1, \dots, n$ , то

$$p_C(x_1, \dots, x_n) = \inf \left\{ \alpha_1 \dots \alpha_n : \left( \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n} \right) \in C, \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0 \right\}$$

$n$ -сублинейная функция и  $p(x_1, \dots, x_n) \leq 1$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in C$ .

**Доказательство.** Если  $\lambda > 0$ , то

$$\begin{aligned} p_C(x_1, \dots, \lambda x_i, \dots, x_n) &= \inf \left\{ \alpha_1 \dots \alpha_n : \left( \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{\lambda x_i}{\alpha_i}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n} \right) \in C, \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0 \right\} = \\ &= \inf \left\{ \lambda \alpha_1 \dots \frac{\alpha_i}{\lambda} \dots \alpha_n : \left( \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{x_i}{\frac{\alpha_i}{\lambda}}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n} \right) \in C, \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0 \right\} = \lambda p_C(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) \end{aligned}$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

Если  $(y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^1, y_{i+1}, \dots, y_n), (y_1, \dots, y_{i-1}, x_i^2, y_{i+1}, \dots, y_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$  при  $i = 1, \dots, n$ , то

$$\begin{aligned} p_C(x_1, \dots, x_i^1 + x_i^2, \dots, x_n) &= \inf \left\{ \alpha_1 \dots \alpha_n : \left( \frac{x_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{x_{i-1}}{\alpha_{i-1}}, \frac{x_i^1 + x_i^2}{\alpha_i}, \frac{x_{i+1}}{\alpha_{i+1}}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n} \right) \in C, \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0 \right\} = \\ &= \inf \left\{ \alpha_1 \dots \alpha_i \dots \alpha_n : (x_1, \dots, x_{i-1}, \frac{x_i^1 + x_i^2}{\alpha_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in C, \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0 \right\} = \\ &= \inf \left\{ \alpha_1 \dots \alpha_n : (x_1, \dots, x_{i-1}, (\frac{t}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{x_i^1}{t} + \frac{s}{\alpha_1 \dots \alpha_n} \frac{x_i^2}{s}), x_{i+1}, \dots, x_n) \in C, \right. \\ &\quad \left. \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0, t + s = \alpha_1 \dots \alpha_n, t > 0, s > 0 \right\} \leq \\ &\leq \inf \{ t + s : (x_1, \dots, x_{i-1}, \frac{x_i^1}{t}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in C, (x_1, \dots, x_{i-1}, \frac{x_i^2}{s}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in C, t > 0, s > 0 \} = \\ &= p_C(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^1, x_{i+1}, \dots, x_n) + p_C(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i^2, x_{i+1}, \dots, x_n), \end{aligned}$$

т.е.  $x_i \rightarrow p(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)$  сублинейная функция при  $i = 1, \dots, n$ . Также ясно, что

$p(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Поэтому  $p(x_1, \dots, x_n)$   $n$ -сублинейная функция. Ясно, что  $p(x_1, \dots, x_n) \leq 1$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in C$ . Лемма доказана.

**Следствие 4.1.** Если выполнены условия леммы 4.6 и  $C$  четное множество, то  $p(x_1, \dots, x_n)$   $n$ -сублинейная четная непрерывная функция.

**Доказательство.** Так как  $(0, \dots, 0) \in \text{int } C$ , то существует  $\delta > 0$  такое, что  $\delta B_1 \times \dots \times \delta B_n \subset C$ .

Поэтому  $0 \leq p(x_1, \dots, x_n) \leq 1$  при  $\|x_1\| + \dots + \|x_n\| \leq \delta$ . Поэтому  $0 \leq p(\frac{\delta x_1}{n\|x_1\|}, \dots, \frac{\delta x_n}{n\|x_n\|}) \leq 1$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $x_1 \neq 0, \dots, x_n \neq 0$ . Отсюда следует, что  $|p(x_1, \dots, x_n)| \leq (\frac{n}{\delta})^n \|x_1\| \dots \|x_n\|$  при

$(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Тогда аналогично лемме 1.7[3] имеем, что  $p: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$  непрерывная функция. Так как  $C$  четное множество, т.е. из  $(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \in C$  следует, что  $(x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) \in C$  при  $i, j \in \{1, \dots, n\}$ ,  $i < j$ , то

$$p(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, x_j, x_{j+1}, \dots, x_n) = p(x_1, \dots, x_{i-1}, -x_i, x_{i+1}, \dots, x_{j-1}, -x_j, x_{j+1}, \dots, x_n)$$

при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ , т.е.  $p(x_1, \dots, x_n)$  четная функция. Следствие доказано.

**Теорема 4.3.** Если  $M$   $n$ -выпуклое четное замкнуто множество,  $(0, \dots, 0) \in \text{int } M$  и при  $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$  условие  $\left(\frac{x_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{x_i}{\alpha_i}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n}\right) \in M$  выполняется тогда и только тогда когда,  $\left(x_1, \dots, x_{i-1}, \frac{x_i}{\alpha_1 \dots \alpha_n}, x_{i+1}, \dots, x_n\right) \in M$  при  $i = 1, \dots, n$  и  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin M$ , то существует ненулевая  $n$ -линейная непрерывная функция  $x^*(x_1, \dots, x_n)$ , которая сильно отделяет множество  $M$  и точку  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ .

**Доказательство.** Из следствия 4.1 следует, что (см. также [18])

$$p_C(x_1, \dots, x_n) = \inf \left\{ \alpha_1 \dots \alpha_n : \left(\frac{x_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n}\right) \in M, \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0 \right\}$$

$n$ -сублинейная четная непрерывная неотрицательная функция,  $p(x_1, \dots, x_n) \leq 1$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in M$

и  $p(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > 1$  (Если  $p(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leq 1$ , то существует  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ , где  $0 < \alpha_1 \dots \alpha_n < 1$  такое, что

$$\left(\frac{\bar{x}_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{\bar{x}_n}{\alpha_n}\right) \in M \text{ или существует } \alpha_1^k, \dots, \alpha_n^k \in \mathbb{R}, \alpha_1^k \dots \alpha_n^k > 1 \text{ и } \alpha_1^k \dots \alpha_n^k \rightarrow 1 \text{ такое, что}$$

$$\left(\frac{\bar{x}_1}{\alpha_1^k}, \dots, \frac{\bar{x}_n}{\alpha_n^k}\right) \in M. \text{ По условию } (0, \dots, 0) \in \text{int } M, \text{ то существует открытая выпуклая окрестность нуля}$$

$Q$  такая, что  $Q \subset \text{int } M$ . Поэтому из доказательства теоремы 1.35[17] следует, что существует число  $\lambda_0 > 0$  такое, что  $\left(\frac{\bar{x}_1}{\lambda}, \dots, \frac{\bar{x}_n}{\lambda}\right) \in Q \subset M$  при  $\lambda > \lambda_0$ . Поскольку  $n$ -выпуклое множество, то легко проверить, что  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in M$ . Получим противоречие). Ясно, что

$x_0^*(\lambda_1 \bar{x}_1, \dots, \lambda_n \bar{x}_n) = \lambda_1 \dots \lambda_n p(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$   $n$ -линейная четная непрерывная функция на подпространстве  $Z = \{(\lambda_1 \bar{x}_1, \dots, \lambda_n \bar{x}_n) : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$ . Поскольку  $x_0^*(\lambda_1 \bar{x}_1, \dots, \lambda_n \bar{x}_n) = \lambda_1 \dots \lambda_n p(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = p(\lambda_1 \bar{x}_1, \dots, \lambda_n \bar{x}_n)$  при  $\lambda_1 \dots \lambda_n \geq 0$  и  $x_0^*(\lambda_1 \bar{x}_1, \dots, \lambda_n \bar{x}_n) = \lambda_1 \dots \lambda_n x_0^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) < 0 < p(\lambda_1 \bar{x}_1, \dots, \lambda_n \bar{x}_n)$  при  $\lambda_1 \dots \lambda_n < 0$ , то имеем, что  $x_0^*(\lambda_1 \bar{x}_1, \dots, \lambda_n \bar{x}_n) \leq p(\lambda_1 \bar{x}_1, \dots, \lambda_n \bar{x}_n)$  при  $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ . По следствию 2.8.2[5] существует  $n$ -линейная четная непрерывная функция  $x^*(x_1, \dots, x_n)$  определенная на  $X_1 \times \dots \times X_n$  такая, что  $x^*(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) = x_0^*(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$  при  $(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in Z$  и  $x^*(x_1, \dots, x_n) \leq p(x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Отсюда следует, что  $x^*(x_1, \dots, x_n) \leq 1$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in M$  в то же время  $x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) > 1$ . Таким образом,  $x^*(x_1, \dots, x_n)$  сильно разделяет множество  $M$  и точку  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Теорема доказана.

Положим  $(X_1 \times \dots \times X_n \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R})^* = B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times B(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$  (см. [12, с.36]). Отметим, что  $(X_1 \otimes \dots \otimes X_n \times \mathbb{R} \otimes \dots \otimes \mathbb{R})^* = B(X_1 \times \dots \times X_n, \mathbb{R}) \times B(\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}, \mathbb{R})$ .

Пусть  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$ . Положим

$$n - E(f) = \{(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in X_1 \times \dots \times X_n \times \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R} : f(x_1, \dots, x_n) \leq \alpha_1 \dots \alpha_n\}.$$

Отметим, что каноническая  $n$ -выпуклая функция является простой  $n$ -выпуклой полунепрерывной снизу функцией. Докажем обратное утверждение.

**Теорема 4.4.** Если  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$  простая  $n$ -выпуклая полунепрерывная снизу функция и  $(0, \dots, 0) \in \text{int}(n - E(f))$ , то  $f^{**}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

**Доказательство.** Так как  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$  четная функция, то  $n - E(f)$  четное



множество. По условию  $f\left(\frac{x_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{x_i}{\alpha_i}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n}\right) = f\left(x_1, \dots, x_{i-1}, \frac{x_i}{\alpha_1 \dots \alpha_n}, x_{i+1}, \dots, x_n\right)$  при  $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$ .

Поэтому из  $\left(\frac{x_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{x_i}{\alpha_i}, \dots, \frac{x_n}{\alpha_n}, \frac{\beta_1}{\alpha_1}, \dots, \frac{\beta_i}{\alpha_i}, \dots, \frac{\beta_n}{\alpha_n}\right) \in n - E(f)$  следует, что

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, \frac{x_i}{\alpha_1 \dots \alpha_n}, x_{i+1}, \dots, x_n, \beta_1, \dots, \beta_{i-1}, \frac{\beta_i}{\alpha_1 \dots \alpha_n}, \beta_{i+1}, \dots, \beta_n) \in n - E(f) \text{ при } \alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0.$$

Пусть  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) \notin n - E(f)$ . Тогда по теореме 4.3 существуют  $x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R)$  и  $b \in R$ , что  $x^*(x_1, \dots, x_n) - b\alpha_1 \dots \alpha_n < x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - b\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$  при  $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in n - E(f)$ . Положив  $\alpha_1 \dots \alpha_n = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$  получим, что  $x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - bf(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) < x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - b\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n$ , т.е.  $b(f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n) > 0$ . Отсюда вытекает, что  $b > 0$ . Тогда имеем, что

$$\frac{1}{b}x^*(x_1, \dots, x_n) - \alpha_1 \dots \alpha_n < \frac{1}{b}x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n \text{ при } (x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in n - E(f). \text{ Возьмем}$$

$$\alpha_1 \dots \alpha_n = f(x_1, \dots, x_n), \quad \bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{b}x^*(x_1, \dots, x_n). \quad \text{Ясно, что}$$

$$\bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) < \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n \text{ при } (x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n. \text{ Поэтому}$$

$$\sup_{(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n} \{\bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)\} \leq \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n, \quad \text{т.е.}$$

$$f^*(\bar{x}^*) \leq \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n. \quad \text{Отсюда имеем, что } \bar{x}^* \in \text{dom } f^* \text{ и}$$

$$\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n \leq \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - f^*(\bar{x}^*) \leq f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \text{ Получим, что}$$

$$\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n \leq f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \leq f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \text{ Следовательно } f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \text{ Теорема доказана.}$$

**Теорема 4.5.** Если  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  простая  $n$ -выпуклая полунепрерывная снизу функция и  $(0, \dots, 0) \in \text{int}(n - E(f))$ , то  $f^{**}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

**Доказательство.** Если  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{\alpha}_1, \dots, \bar{\alpha}_n) \notin n - E(f)$ , то по теореме 4.3 существуют

$$x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R), \quad b \in R \quad \text{и} \quad \varepsilon > 0 \quad \text{такие, что}$$

$$x^*(x_1, \dots, x_n) - b\alpha_1 \dots \alpha_n \leq x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - b\bar{\alpha}_1 \dots \bar{\alpha}_n - \varepsilon$$

при  $(x_1, \dots, x_n, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in n - E(f)$ . Положив  $(x_1, \dots, x_n) = (\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \in \text{dom } f$  и  $f(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n) \leq \alpha_1 \dots \alpha_n$  отсюда при  $\alpha_1 \dots \alpha_n \rightarrow +\infty$  имеем, что  $b \geq 0$ .

$$\text{Если } b > 0, \text{ то аналогично доказательству теоремы 4.4 имеем, что } \bar{x}^* = \frac{1}{b}x^* \in \text{dom } f^* \text{ и}$$

$$f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n). \text{ Также, аналогично доказательству теоремы 4.4 имеем, что } b > 0 \text{ при } (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \in \text{dom } f.$$

Пусть  $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \notin \text{dom } f$ . Тогда, если  $b > 0$ , то имеем, что  $f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = f(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ . Если  $b = 0$ , то  $x^*(x_1, \dots, x_n) \leq x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \varepsilon$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in \text{dom } f$ . Возьмем  $\bar{x}^* \in \text{dom } f^*$ . Тогда

$$f^*(\bar{x}^*) \geq \bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n). \text{ Поэтому}$$

$$\bar{x}^*(x_1, \dots, x_n) + \mu x^*(x_1, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n) \leq f^*(\bar{x}^*) + \mu x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \mu \varepsilon$$

при  $\mu > 0$ . Отсюда следует  $f^*(\bar{x}^* + \mu x^*) \leq f^*(\bar{x}^*) + \mu x^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - \mu \varepsilon$ , которую можно записать в виде

$$\bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) + \mu \varepsilon - f^*(\bar{x}^*) \leq (\bar{x}^* + \mu x^*)(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) - f^*(\bar{x}^* + \mu x^*) \leq f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$$

$$\text{Подставив } \mu = \frac{a + f^*(\bar{x}^*) - \bar{x}^*(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)}{\varepsilon} \text{ отсюда имеем, что } a \leq f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) \text{ при достаточно боль-}$$

ших  $a$ . Поэтому  $f^{**}(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n) = +\infty$ . Теорема доказана.

Другие варианты теоремы 4.4 и 4.5 доказаны в [4, с. 96].

Из теоремы 4.5 следует, что  $f(x_1, \dots, x_n) = f^{**}(x_1, \dots, x_n) = \sup_{x^* \in B(X_1 \times \dots \times X_n, R)} \{x^*(x_1, \dots, x_n) - f^*(x^*)\}$  при

$(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ . Поэтому, если  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  простая  $n$ -выпуклая полунепрерывная снизу функция и  $(0, \dots, 0) \in \text{int}(n - E(f))$ , то  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R_{+\infty}$  каноническая  $n$ -выпуклая функция.

Если  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R$   $n$ -выпуклая четная функция и  $f(\alpha_1 x_1, \dots, \alpha_n x_n) = f(x_1, \dots, x_{i-1}, \alpha_1 \dots \alpha_n x_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ ,  $\alpha_1 > 0, \dots, \alpha_n > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ , то  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow R$  простая  $n$ -выпуклая функция.

Отметим, что если функция  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  непрерывна в точке  $(0, \dots, 0) \in \text{int dom } f$  и  $f(0, \dots, 0) < 0$ , то  $(0, \dots, 0) \in \text{int}(n - E(f))$ .

Если  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}_{+\infty}$  простая  $n$ -выпуклая полунепрерывная снизу функция и функция  $f$  непрерывна в точке  $(0, \dots, 0) \in \text{int dom } f$ , то  $\bar{f}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - f(0, \dots, 0) - 1$  простая  $n$ -выпуклая четная полунепрерывная снизу функция и  $(0, \dots, 0) \in \text{int}(n - E(\bar{f}))$ . Поэтому, если  $f: X_1 \times \dots \times X_n \rightarrow \mathbb{R}$  простая  $n$ -выпуклая (четная  $n$ -сублинейная) непрерывная функция, то  $f^{**}(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n)$  при  $(x_1, \dots, x_n) \in X_1 \times \dots \times X_n$ .

Ясно, что все результаты пунктов 2 и 3 справедливы для простой  $n$ -выпуклых функций.

Если  $X_1, \dots, X_n$  линейные пространства, то можно исследовать и аналогичные задачи (см.[4])

### Список литературы

1. Садыгов М.А. Необходимое условие экстремума высших порядков для негладких функций. // Изв.АН Азерб. ССР, сер. физ.-техн. и матем. наук.- 1989, № 6.- с. 33-47.
2. Садыгов М.А. Экстремальные задачи для негладких систем. - Баку-1996, 148с.
3. Садыгов М.А. Исследование негладких оптимизационных задач. - Баку: Элм, 2002.- 125 с.
4. Садыгов М.А. Исследование субдифференциала первого и второго порядков негладких функций. -Баку: Элм, 2007. -224 с.
5. Садыгов М.А. Субдифференциал высшего порядка и оптимизация.- Deutschland: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2014. - 359 p.
6. Садыгов М.А. Свойства бисубдифференциала бивыпуклых функций. // Annali d'Italia, 2023, №47, с.28-41.
7. Садыгов М.А.  $n$ -выпуклые и  $n$ -положительно однородные функции. - Баку-Myallim LTD, 2008.- 110 с.
8. Рокафеллар Р. Выпуклый анализ. - М.: Мир, 1973.- 469 с.
9. Иоффе А.Д., Тихомиров В.М. Теория экстремальных задач. - М.: Наука, 1974.- 479 с.
10. Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. - М.: Мир, 1979. - 399с.
11. Обен Ж.П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ.- М.: Мир, 1988.- 510 с.
12. Банаховы и полинормированные алгебры: Общая теория, представления, гомологии.- М.: Наука, 2022.- 466с.
13. Пич А. Ядерные локально-выпуклые пространства. - М.: Мир, 1967.- 256 с.
14. Варга Дж. Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями. -М. : Наука, 1977.- 623 с.
15. Обен Ж.-П. Нелинейный анализ и его экономические приложения. М. : Мир, 1988.- 264 с.
16. Лоран П.-Ж. Аппроксимация и оптимизация. М.: Мир, 1975.- 496 с.
17. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1975.- 443 с.
18. Sadygov M.A. Bisubdifferentiability of biconvex functions. // Annali d'Italia.- 2025, №64.- с.23-40.

## LABOR TRAINING AND EDUCATION OF PRESCHOOL CHILDREN ESSENCE, PURPOSE AND OBJECTIVES

**Sevil Farrukh Ibrahimova**

*Sheki Branch of the Azerbaijan State Pedagogical University*

*Honored Teacher, Senior Lecturer*

<https://orcid.org/0000-0002-8944-3611>

### Abstract

One of the main tasks of labor education is to form the right attitude to labor in children. One of the main features of the effective organization of labor is its implementation in accordance with age and individual characteristics. The article emphasizes that the curriculum reform in Azerbaijan is conditioned by the need to ensure the adequacy of education in the XXI century, to cultivate a creative, self-developing personality, and draws attention to the new, personality-oriented and developmental training, which is more widely applied in the practice of preschool education, and the interest shown by the child in the life and work of the elderly, as the main condition for the psychological preparation of the child for labor.

The article presents education that serves the comprehensive, harmonious development of preschool children, and how the study of Technology serves the development of preschool children's technological thinking, the formation of technological skills in them, and the acquisition of the necessary knowledge to continue their education in later stages.

**Keywords:** Technology, equipment, resources, technical progress, hard work, economic and social, preschool pedagogy, professions, labor process.

**Relevance of the research topic.** Preparing the young generation growing up in modern conditions for a free life and certain labor relations requires great competence. Every young person who is brought up in the spirit of free creativity and self-confidence, who is able to take on the responsibility of making decisions and drawing conclusions, can play a unique role in the socio-economic development of society tomorrow. The analysis of the materials I have collected gives reason to say that familiarity with the fields of labor; familiarity with labor tools; familiarity with professions; respect for working people, as well as the implementation of labor organization in various directions requires great effort from the educator, along with knowledge and skills.

### Interpretation of generalizations formed on the basis of research materials.

"Technology" is an integrative field of education, a human activity that synthesizes knowledge from other subjects and shows its application in various fields. The study of the new integrative field of education, "Technology", and the presence of an appropriate material and technical base, allows children to acquire general labor and partial special knowledge and skills, ensuring their intellectual, physical, ethical and aesthetic development. One of the most important tasks of preparing children for school education is to educate them in readiness for labor.

The current stage of development of science and technology and the new discoveries made in this field make it an important task to raise comprehensively developed young people. [1; 32] In our republic, which is building an independent and legal state, and considers the development of free enterprise, market economy, and private ownership as its highest goal, the labor education, vocational orientation, and development of aesthetic tastes of children and adolescents are of particular importance. In this regard, technology has a unique place and role among the

educational subjects that serve the comprehensive and harmonious development of preschool children. Thus, technology should awaken in children from the first stages of preschool education a sense of love and respect for labor and working people, and should cultivate in them the ability to participate in socially useful productive work within their capabilities.

In the modern era, when technical progress is gaining momentum, the role of electronic and information technologies is increasing, and competition in a market economy is intensifying day by day, this subject serves to develop the technological thinking of preschool children, form technological skills in them, and acquire the necessary knowledge to continue their education in later stages.

At a time when the need to direct resources and information to serve the interests and benefits of people is put forward as a necessary requirement, it is becoming an important task for preschool children to acquire technological knowledge and skills and to be able to use them purposefully in their activities. The teaching of "Technology" as a subject in preschool institutions primarily stems from this necessity and is of great importance in terms of instilling life skills in preschool children. Teaching the subject "Technology", that is, Labor, in preschool institutions creates comprehensive conditions for the formation of creative abilities in children, for their continuation of education in technical fields. In the process of training, children determine the possibilities of technical activity, put forward "ideas" for solving problems, perform simple technological work and get the opportunity to evaluate the results. Teaching this subject also creates the basis for the formation of children's character, their moral, intellectual and aesthetic development. [4; 61]

Labor is the basis of human life. The foundation of happiness is built through labor. The first condition for good upbringing is that the child understands that

all the material blessings he uses do not fall from the sky ready-made and can feel that they are the fruit of someone's labor.

It is essential to start developing industriousness in children who have just entered life, who are very interested in the world around them and things, and who are eager to learn everything, from preschool age. In this regard, children are involved in labor work that is appropriate to their abilities from preschool age. The scope of their labor activity is gradually expanded and complicated. Labor forms in children, along with industriousness, such moral qualities as endurance, courage, companionship, friendship, caring, kindness, zeal, and patriotism.

Properly organized and purposefully implemented labor has a positive impact on all of a child's personal qualities and plays a decisive role in determining their future life path.

The Russian educator K.D.Ushinsky noted that real and free labor is of such great importance in a person's life that without it he loses all his value and dignity. Labor is not only a necessary condition for the development of a person, but also necessary for maintaining the degree of dignity he deserves. Therefore, the labor education of preschool children should be properly structured. This leads to the gradual formation of their ability to perform physical labor. In the process of physical labor, they receive extensive knowledge about the properties of objects, plants, animals and birds they care for, which gradually forms individual and mental characteristics in children.

It is important to start developing industriousness from a young age. Because the success of educating this quality depends largely on this period. On the other hand, in children who have just entered life, who are very interested in the world around them and things, and who are eager to learn everything, it is necessary to start developing industriousness from this period. If work is not done with children from this age towards developing industriousness, they may develop laziness or an indifferent attitude towards work. Once these qualities become a sign of character, it is very difficult to eliminate them.

The work of preschool children has its own characteristics. Their work is often related to play. This manifests itself in various forms. For example, in the game "Car Inspector", children serve passengers in the role of an inspector. In the game "Chef", the chef tries to cook a delicious dish. In the younger group of children, they feel the need to do physical work in the process of playing. [3; 48]

Combining work with play encourages children to act in a certain role (large group) and wear professional insignia (wearing a sailor's hat, carrying traffic signs, a flag, a flashlight, etc.). In the labor process, children sometimes set goals, plan work in advance, organize their activities accordingly, and work until they achieve a certain result.

Children acquire many skills and habits that are vital in their daily work activities, and they acquire the ability to work independently. In the process of work, children study the objects around them, observe the growth and development of plants. They take care of

animals, get acquainted with their lifestyle. Children compare and contrast all this and try to find answers to many questions. As a result, their interest in studying these patterns gradually increases.

Preschool pedagogy sets certain goals for child labor: to acquaint children with the labor of adults, to instill in children respect for their labor, to form simple labor skills and habits, to form an interest in labor, to teach that labor has a social nature. Although it is primitive for a one and a half to two-year-old child to put on and take off his clothes, shoes, and comb his hair, its importance is quite great. By performing these actions, the child achieves the labor goal set before him. At the age of three or four, he joins in more complex household chores. Often, child labor is carried out in the form of a game. Attempting to do something has a positive effect on the development of activity, independence, purposefulness, initiative, physical strength, and mental tension in the child's character.

One of the tasks carried out during labor education is the psychological preparation of the younger generation for labor. What does psychological preparation of the younger generation for labor mean?

To make the educated understand the importance of labor in economic and social life, to explain to them the role of labor in the normal development of the human body, the formation of moral qualities and psychological processes, as well as to instill in them a love for labor and a sense of respect for working people, and a sense of hatred for those who despise labor, means psychologically preparing them for labor.

The practical preparation of the younger generation for labor is also the task of labor education. What is its essence? It consists in instilling ordinary labor skills and habits in children, adolescents and young people in the areas of self-service, household, and socially useful activities in the family, kindergarten, and school. The work carried out in this direction serves to prepare the younger generation for labor in a practical way.

In the conversation about preparation for work, one cannot forget about another type of work, mental labor. Because mental labor also has its own specific skills and habits. For example; writing poetry, drawing, composing music, scientific research, preparing for lessons, organizing and conducting lessons, etc. activities belong to mental labor. There are a number of skills and habits that characterize each of them. Instilling such skills and habits in the younger generation is also an integral part of practical preparation for work. [2; 41]

Instilling work culture, skills and habits in children is one of the tasks of labor education. When we say work culture, we mean arranging the workplace, bringing the necessary items, devices, tools, equipment, etc. for work, tidying the workplace after work, and taking safety measures.

Children are given relevant information about the measures we have listed, and are also armed with those skills and habits. The foundation of labor education is laid in the family. In the family, the various types of work of parents serve as an example for children: they strive to do the same work as their parents. Experienced

parents involve their children in household and self-service work from an early age, which they are capable of.

Labor education continues in kindergarten. Children here enthusiastically participate in games depicting professions such as teaching, medicine, driving, and others.

Thus, it can be said that the development of a child's personality is formed in the process of activity. From this point of view, conveying to children what the role of labor in society is, as well as instilling in them a sense of hard work, explaining to them how necessary labor is for survival, is one of the important tasks today. The organization of children's labor activities in preschool institutions depends largely on the planning and correct understanding of work. H. Zardabi, who once highly appreciated the correct planning of labor, wrote: "It is possible to educate morally corrupt people, even criminals, with properly organized and consciously directed labor."

The child must see the connection between what, how, and why it is being done. When planning the child's work, the educator must take into account the relevance of the existing difficulties to the child's life experience and determine in advance ways to overcome them.

Work planning is related to the sequential execution of the work to be done. Tasks such as what to do first, what to do later, and why not do it differently generally require a systematic approach to work. For example, when children clearly understand the sequence of washing their hands and face, such as first rolling up the sleeves of their clothes, then washing their hands, and finally washing their face, they perform the work more efficiently. Thus, the educator determines the sequence of work, and the children follow this sequence in the process of activity.

The more purposeful and clear the children's labor activity, the more interesting and neat its implementation will be. By directing the children's actions in a logical sequence, the educator achieves more effective work with less effort and time.[8; 52]

Children in the older group often prepare the plan of the assigned work themselves. The main goal of the educator is to teach the child what he cannot do. Of course, in order for the child to plan his own activities, it is necessary to give him an example, use previous planning, and accustom him to think about his own activities in advance.

The purpose of Labor Lessons in the preschool education curriculum is to prepare children for independent life, promising professions, to acquire general skills and habits, and to adapt to various conditions based on creative thinking and active activity. Preschool children's acquaintance with different professions and gaining a certain idea encourages them to engage in direct labor. It is true that during preschool age, a child's labor activity is mainly episodic, random in nature, and cannot be considered organized, regular, planned labor aimed directly at the production of material goods. Moreover, their acquaintance with certain labor activities and labor tools occurs mainly in the process of play, and

sometimes their performance of any labor tasks bears the stamp of game activity, in other words, has a game character. In the lesson models prepared on the basis of the content standards of Technology in the areas of development, the development of children's cognitive, informative-communicative, psychomotor activities, as well as the acquisition of necessary habits, is in the center of attention. The lesson is the product of the creativity of each teacher. Therefore, it is up to the teacher to enrich and make labor activities more interesting by taking a creative approach.

Children take the labor tasks they undertake in the process of play relatively seriously, and make considerable volitional efforts to complete a certain task. If a child plays the role of a watchman, he does not leave his place for a certain period of time in connection with this task, trying to fulfill the norms required of him. In such games, children develop endurance, volitional effort, accuracy, etc. necessary for labor activity. It should be taken into account that since labor activity is always aimed at obtaining a certain result, material and moral product, creative elements always play an important role here. True, in the labor process, a completely new, original product is not always obtained, in many types of labor, a product is obtained that mainly corresponds to a certain sample or standard.

But what serves as such an example for a child in the process of play, what should he liken his product to? This example is mainly the actions and behavior of adults, as well as labor activity. Children also strive to ensure that their actions and behavior, the performance of labor tasks, closely correspond to this example. However, they do not always act as imitators. They also strive to "create", "discover". Moreover, such "discoveries" are not uncommon in their lives. However, it should be noted that children's creations are "discoveries" of what has already been created, and their "discoveries" are "discoveries" of what has already been discovered. In other words, they themselves try to determine these or other issues for themselves, independently, "without taking an example" and "without imitating", and they tend to be creative. Such creativity is most noticeable in their games related to assembly. True, in order to make this or that new object, they do not first prepare it in their heads, in an ideal form, as adults do, and then try to translate their ideas into material form. This is not relevant to their age level. However, they make this "discovery" in a visual-practical process. Sometimes, while assembling an object in the process of the game, the child himself can get a completely new object without expecting it. So, in the process of the game, the child understands the world around him, and also masters various fields of labor, labor tools and the rules for using them.

There is a special tendency for children to work in preschool age. However, it should be taken into account that in kindergarten children, work is more attractive to them because it resembles a game, in other words, it is carried out as a game. In other words, preschool children give a playful spirit even to serious work tasks assigned to them, it is this spirit that attracts them more.

Thus, even children's household work is performed because it attracts them, on the contrary, the motive for doing this or that work for others is still very weak in them. However, it is precisely in the process of such work that qualities such as organization, independence, perseverance and a sense of responsibility begin to form in children, which is useful for future work. As a result, older preschool children, when on duty, are able to perform the tasks assigned to them without any reminders. They are able to organize their work in an organized manner.[5; 12]

One aspect that cannot be overlooked is that preschool children strive to do work that attracts and interests them. It is very difficult to attract preschool children to do work that does not attract or interest the child. For this, it is important to set interesting tasks for them. The research of the Soviet psychologist Elkonin attracts attention in this regard. For example, preschool children are given a piece of wood, a hammer, nails, etc., and are given the task of "making something". 72% of children give up work and do not make anything. However, as soon as they receive the task of making a small table from them, the children's attitude changes and they begin to work enthusiastically.

One of the factors that plays an important role in labor education in kindergarten children is the proper guidance of children's labor by adults. This work goes in two directions. On the one hand, adults organize interesting conversations about various types of labor, instilling interest and enthusiasm in them for labor. On the other hand, children are taught the rules for using tools and materials. It should also be noted that measures to encourage children in the work process have a very serious impact, and special attention should be paid to this aspect. It is also important to consider that a need develops when different means are used to satisfy it. When the same thing is repeated many times, a person's attitude towards it changes, and indifference towards it may arise. Therefore, it would not be right to direct a child to engage in the same thing - a labor task - for a long time, and in this case to use the same means.

As the child achieves success in that activity process, he becomes more inclined towards it. In other words, as the activity and abilities develop, the inclination also develops. This clearly shows that the development of children's abilities directly depends on the strengthening of their inclination in this or that field of activity. [9; 21]

It is of great importance for children to have spatial imagination in order to be creative in the work process.

The wider the children's spatial imagination, the more diverse their creative possibilities and the wider

their field of vision. If imagination is superficial and limited, it will have a negative impact on creativity, regardless of the level of development of abilities.

Thus, it can be said that one of the main tasks facing technology classes is to develop the technical thinking and creative activity of preschool children, which can be further realized in the process of technology classes.

**Result.**In general, it can be said that Technology-Labor classes reflect all activities aimed at achieving general learning outcomes by determining the main goals of teaching this subject in preschool educational institutions and are focused on the capabilities and needs of each child. Labor, as the main type of activity of children, plays a key role in the comprehensive development of children. Currently, the theoretical problems of labor training include the optimal selection of its content, the improvement of labor training systems, methods for developing children's technical and technological thinking, and the effective formation of simple labor skills and habits.

At the same time, teaching this subject creates the foundation for the formation of children's character, their spiritual, intellectual, and aesthetic development, and their adaptation to socio-economic conditions by acquiring technological skills appropriate to the era.

### References

1. A. Hasanov Preschool pedagogy. Baku 2000
2. Preschool education program (curriculum) in the Republic of Azerbaijan (3-6 years old) Baku-2015.
3. Javadov I.A; Jafarova L.K. Features of the new content of preschool education. Baku-2015
4. I. Hasanov, A. Rustamova.—The first manual based on the new program: "Curriculum"
5. Sh.O.Agayev S.S.Rzayeva Preschool curriculum: theory and practice. Baku 2017.
6. Methodology for organizing work in school preparatory groups (UNICEF) 2021
7. "State Standard and Program of Preschool Education." July 16, 2010.
8. Scientific and methodological journal of preschool and primary education. 2019.
9. Sh.O.Agayev S.S.Rzayeva Preschool curriculum: theory and practice. Baku 2017
10. M. Hasanov Organization of play and labor activities of preschool children. Baku 2001
11. Z.H.Orucov, Y.T.Rzayeva Technology (labor training). Baku 2006
12. Gasimova. "Labor is an important means of educating a person." Azerbaijan School 2014/5

# PEDAGOGICAL SCIENCES

## HOW TO TEACH SPEAKING: LINGUISTIC KNOWLEDGE

**Aytan Huseynova**

*Senior teacher*

**Minavvar Mammadova**

*Ph. d. associate prof.*

*Azerbaijan Military Institute named after Haydar Aliyev*

### Abstract

A language achieves a genuinely global status when it develops a special role that is recognized in every country. This might seem like stating the obvious, but it is not, for the notion of “special role” has many facets. Such a role will be most evident in countries where large numbers of the people speak the language. In this article authors shows the English as a global language as a mother tongue – in the case of English, this would be mean the USA, Canada, Britain, Ireland, Australia, New Zealand, South Africa, several Caribbean countries and a sprinkling of other territories.

**Keywords:** language achieves, development, between categories, interdependently, foreign-language speakers

To achieve such a status, a language has to be taken by other countries around the world. Because of the three-pronged development- of first-language, second-language, and foreign-language speakers – it is inevitable that a global language will eventually come to be used by more people than any other language. English has already reached this stage in our country too. Our Universities teach this language to the specialists in all spheres, especially to the military servicemen.

Linguistic knowledge is often ranged along a cline from the big picture, e.g. knowledge of the way an anecdote typically unfolds, to the fine print, e/g/ knowledge of grammar and vocabulary. In fact, the boundaries between categories are blurred, and they work interdependently, such that in reality it is difficult to account for particular features of a speech event by reference to any single knowledge system.[1] However, for convenience, we shall discuss these different levels in turn.

### Genre knowledge

Very broadly, there are two main purposes for speaking. Speaking serves either a transactional function, in that its primary purpose is to convey information and facilitate the exchange of goods or services, or it serves an interpersonal function, in that its primary purpose is to establish and maintain social relations. A typical transactional speech event might be phoning to book a table at a restaurant. The story that Lath tells about her domestic science class is motivated less by the need to convey the facts of the matter (i.e. a transactional purpose) than by the wish to amuse her audience and thereby maintain a sense of shared community between friends (i.e. an interpersonal purpose).[2]

These two basic purposes for speaking generate a host of different types of speech events. These, in turn, will be sequenced and structured in accordance with the kinds of social and mental processes that they accompany. We saw for example, how Kath told her kedgere story according to a narrative script, which, to put it very simply, has a beginning, middle, and end.

**Service encounters**, such as buying goods, getting information, or requesting a service, are transactional speech events that follow a fairly predictable script. Typically, the exchange begins with a greeting, followed by an offer, followed by a request, and so on, as in: [3]

<p>Good morning.          Good morning.          What would you like?          A dozen eggs, please.          Anything else?...          etc.</p>
---

A certain amount of variation is generally permitted; some of the moves may be dispensable, while others of a more interpersonal nature – such as a comment about the weather – might be optional. Different cultures and sub-cultures may develop their own variants. Some service encounters in some cultures may permit bargaining, for example.

Over time and within particular speech communities, certain, ways of realizing these speech events have become conventionalized to the point that they have evolved into specific genres. Genre is an elusive term. Here we will use it to mean simply a type of speech event, especially in terms of how that speech event might be labeled by its participants. Hence, there is a difference between saying “I had a chat with the boss” and “I had a job interview with the boss” or “I did a presentation to the boss”. Knowledge of how specific genres –such as chatting, job interviews, or business presentations- are realized is part of the linguistic knowledge that speakers in a particular speech community share.

An important factor that determines the structure of a genre is whether it is interactive or non-interactive. Multi-party speech, as in a shopping exchange or casual conversation between friends, is jointly constructed and interactive. Monologues, such as television journalists live report, a university lecture, or when you leave a voice-mail message, are non-interactive.

Finally, a distinction needs to be made between planned and unplanned speech. Certain speech genres,



such as public speeches and business presentations, are typically planned, to the point that they might be completely scripted in advance. This means that their linguistic features will resemble or replicate features of written language. On the other hand, a phone conversation to ask for train timetable information, while following a predictable sequence, is normally not planned in advance: each participant has to make strategic and

spontaneous decisions on the basis of the way the discourse unfolds. This, in turn, will affect the kind of language used.

On the basis of these criteria, we can classify speaking genres according to their general purposes, the kind of participation they involve, and the degree of planning (bearing in mind that these distinctions are less polarities than stages on a continuum). For example: [4]

	<b>purpose</b>	<b>participation</b>	<b>planning</b>
Airport announcements	transactional	Non-interactive	planned
Sports commentary	transactional	Non-interactive	unplanned
Job interview	transactional	interactive	(partly) planned
Service encounter	transactional	(partly) interactive	
Leaving a voice-mail message	Transactional or interpersonal	Non-interactive	unplanned
Casual conversation	interpersonal	interactive	unplanned
Joke telling	interpersonal	(partly) interactive	(partly) planned

### Conclusion

We started this article by making a distinction between what speakers can do- that is the mental and physiological processes involved in speaking – and what speakers know –that is the knowledge base that speakers draw on that enables these processes.

The kinds of knowledge that speakers bring to the skill of speaking comprise extra linguistic knowledge, such as background knowledge of topic and culture, and linguistic knowledge, including discourse knowledge, speech act knowledge, and knowledge of grammar, vocabulary, and phonology.

So we have described speaking skills and speaker knowledge insofar as they relate to highly-skilled, knowledgeable speakers, making no distinction between speaking in a first or a second or third, or fourth

etc. language. But speakers of another language do not, initially, have easy access to these skills and this knowledge.

### References

1. Burns, A. and Joyce, H (1997) Focus on speaking, Macquarie University: NCELTR
2. Bygate, M. (1987) Speaking, Oxford University Press.
3. Hughes, R (2002) Teaching and Researching Speaking, Longman.
4. Nolasco, R. and Arthur, L (1987) Conversation, Oxford University Press.

# PHILOLOGICAL SCIENCES

## RESEARCH OF LEXICOGRAPHY ISSUES IN TURKOLOGY AND AZERBAIJANI LINGUISTICS

**Jabbarova Izzet Gulam qizi**

*The Honored teacher of*

*The Republic of Azerbaijan*

*The Academy of the Ministry of Emergency Situations*

*Candidate for a degree of Nasimi Institute of Linguistics of ANAS*

### Abstract

In the article it has been dealt with the investigation of lexicography issues in Turkology and Azerbaijani linguistics. The specific, clear and correct expression of different linguistic concepts of the terms related to the science of linguistics shows that the science of linguistics is at a high level of development. Scientific development in our modern times is also reflected in the researches in the field of Turkology. In the article information has also been given about well-known scientists, researchers and their works who have conducted serious research in the field of general linguistics in Azerbaijan and have a special place in Azerbaijani linguistics. In-depth research, analysis and scientific summarization of the onomastic lexicon, which has a special place in the vocabulary of the language, helps to solve the complex and necessary issues of our language and history. The information have been given about the works of Turkologists who dealt with the most relevant problems not only with one branch of linguistics, but also with phonetics, orthography, etymology, historical grammar, morphology, syntax, speech culture, etc.

**Keywords:** turkology, Azerbaijani linguistics, issues of lexicography, general linguistics, onomastic lexicon, linguistic concepts, the vocabulary of the language

Turkology is as a field of humanities studies the history, languages, literature, folklore, ethnology of the Turks in a comparative way. Turkology is a scientific field that gained a system on the basis of oriental studies, which emerged as a result of the West's attempts to study the East. The vast majority of turkological information about the Middle Ages is available to us thanks to the works of Byzantine/Greek scholars, historians, ambassadors, geographers and travelers.

As we know, the lexical layer of the language consists of two parts: general function and special function. Noted these two functional parts complete each other in the formation of the lexical layer of the language. The linguistic units, which are the basis in its creation of the terminological system, performing the special function of the language cause the formation of the system. The terms, which are linguistic elements of the terminological system, differ from other elements in the language system according to their specific characteristics, and the terms play a decisive role in the formation of the scientific style of the language. For this reason, the terms organize a terminological system in the sense of a sign of scientific concepts. A collection of terms belonging to different fields creates a terminological system. The terms belonging to the science of linguistics form an exhausted and full opinion idea about the science to which it belongs. The concrete, clear and correct expression of different linguistic concepts of terms related to the science of linguistics shows that it is at a high level of development. There are two concepts that we often encounter in the scientific literature: "linguistic terms" and the term "linguistic terminology". One of the first works of the world of linguistics is Mahmud Kashghari's "Divanu Lughat-it-Turk", which is considered an encyclopedia of Turkology. Ethnological information about the Turks was systematized for the first time in the 11th century by the Turkish philologist

Mahmud Kashghari in the work "Divanu Lughat-it-Turk". This work was written primarily to fulfill the function of teaching the Arabs this language. Only the features of the Turkish language were not analyzed in the work, at the same time, the philologist, who knows the Arabic language well enough, analyzed the specific characteristics of the Arabic language to the smallest details. In the work of M. Kashghari, a large number of terms related to various fields of science have been used. Among the linguistic terms used in the work, the following terms were used: yazı - "writing", kileçü - "word", kok - "root", "main", "ring", "syllable", etc. [9, p. 235]. Multilingual dictionaries began to appear in the thirteenth century, when trade expanded even more.

"Turk-tatar dilinin grammatikasi", («Турецко-татарского Грамматика») written by Mirze Kazymbey in 1839, as well as "Turk-tatar dilinin umumi grammatikasi" published in 1946 play an important role in Azerbaijani linguistics. The information about the grammatical structure of the Azerbaijani language was given clearly and extensively in these works. The information reflected in this work is one of the excellent sources that maintain the importance of grammar. *The work written by M. Kazym bey was evaluated as a new phenomenon not only in Azerbaijani linguistics, but also in all Turkic languages [1, p.35].* As Y.M. Seyidov mentioned, *Mirza Kazim bey's grammar preceded dozens of works on the grammatical structure of the Turkish language by a century. During the research, it did not escape our notice that M. Kazymbey's («Турецко-татарского Грамматика») "Turk-tatar dilinin grammatikasi" is also called the grammar of the Azerbaijani language [9, p. 265].*

During the period of P.A. Pallas, the investigation of the Turkish language was further developed. In his work "Butun dillərin mugayisəli lugheti" he also gave

characteristics of Mishar, Tatar, Nogai, Bashkir and other Turkic ethnic groups of Turks.

In the 19th century, Mirza Kazim Bey played an important role in the development of Turkology. The above-mentioned work written by him was a fundamental scientific discovery of its time. [10]. By the end of the 19th century, the science of Turkology had already entered the fields of science such as history, philology, folklore studies, archeology, ethnology. And in the 20th century, Turkology entered such fields of science as physical anthropology, numismatics, genetics, ancient Turkish alphabets, typology, genesis, etymology, onomastics and toponomics.

An important feature of enlightenment in Azerbaijan at the end of the 19th century was closely related to natural science. In this regard, the creativity of the outstanding educator, naturalist, cultural figure, pedagogue, talented publicist Hasan Bey Zardabi is typical. He is considered the founder of the democratic press in Azerbaijan, which comes from national self-awareness. The publication of the first "Akinchi" newspaper in the Azerbaijani language on July 22, 1875 is connected with his name, and this newspaper was being published between 1875 and 1877. In his works with philosophical content, his views on enlightenment and natural science have been reflected in the following works: "Torpag, su ve hava", "Barama gurdunun saxlanmasi", "Gigiyena hagginda", "Ayn fazalarinin yerde uzvu hayata tesiri", "Bedeni selamat saxlamaq dusturuemeldir". In addition, his articles that were published in "Akinchi" newspaper are also important in this regard.

H.B. Zardabi paid attention to other means, such as theater, in addition to charitable societies in the field of educated and enlightened the people and the young generation. At the same time, H.B. Zardabi attracts attention with his educational and social philosophical ideas. He saw the progress and happiness of his people in science, enlightenment, and the development of education. Qualities such as humanism, patriotism, and truthfulness took the main place in his educational views.

Modern scientific developments allow us to use calibrating, dendrochronology, metallurgy, chemistry, textiles and other fields for help in research in the field of Turkology. Among the representatives engaged in the scientific research of the Azerbaijani language B. Chobanzade, J. Khandan, M. Jafar, M. Shiraliyev, A. Demirchizade, M. Huseynzade, A. Orujov, S. Jafarov, A. Abdullayev, F. Zeynalov, and in later times A. Akhundov, T. Hajiyeve, Y. Seyidov, N. Jafarov and other linguists have been trained, and served the scientific development of the language. Living the values formed by the nation for thousands of years, language is also an important event for the transmission of these values to the younger generations.

Language is an important event for the survival of the values formed by the nation for thousands of years and for the transmission of these values to the younger generations. Therefore, language is not only a means of communication, but also a system of values. It should be emphasized that the existence of the literary language is an important factor in the development of the

state language, and poets and writers have made great contributions in this direction. At the same time, the name of many intellectuals can be mentioned. However, the incomparable services of Mirza Ibrahimov, an outstanding Azerbaijani intellectual, a fighter for the national language, and the late academician, should be remembered with special respect.

After the restoration of state independence in 1991, he had an exceptional role in establishing the Azerbaijani language as the state language in the Constitution adopted by referendum on November 12, 1995.

Compared to the traditional fields of language science (language-production or linguistics) in Azerbaijan, the study of general or theoretical linguistics on a scientific basis started relatively late – in 1919, with the establishment of the Department of General Linguistics of Baku State University. The most important reason for this that Azerbaijani linguistics has been under the influence of the Arabic school of linguistics since the Middle Ages. The main priority direction in the study of language in Eastern countries was lexicography – vocabulary. Prominent Turkologist Professor Bekir Chobanzadeh conducting research in the aspects of general linguistics and Turkology laid the foundation for a new stage of linguistic development in Azerbaijan in the 1920s. B. Chobanzade, who has a rich and multifaceted theoretical and philological heritage, perfectly knows Arabic, Persian, Russian, English, German, French, Hungarian, Czech, Polish, Georgian and Slavic languages, including all dialects and local languages of the Turkish languages served unparalleled services in the research and teaching of Turkology, language history and general linguistics. After the genius M. Kashghari and the great Mirza Kazim Bey, he is one of our most famous scholars in the field of Turkish language and literature. In this sense, it was B. Chobanzade who founded the first academic school of linguistics in Azerbaijan. B. Chobanzade, who was one of the main organizers of the 1st Turkological congress held in Baku in 1926, is the author of books such as: "Turk-tatar lisaniyyetine medkhel", "Turk-tatar dialektolojisi", "Turk grameri", "Krim-tatar elmi-serfi" as well as dozens of scientific articles. But, the author of the first work on general linguistics in Azerbaijan was Professor Bekir Chobanzade, whose "Turk-tatar lisaniyyetine medkhel" is an exception. So, considering that this work was written in 1924, we can say that the foundation of general linguistics in Azerbaijan was laid in the 20s of the 20th century. Considered an event for its time, this work is the first investigation on general (theoretical) linguistics in Turkology [3].

Without exaggeration, it can be said that it is no exaggeration to say that starting from the 1950s, B. Chobanzade was the master of thought of the linguists who wrote fundamental works on various directions of Azerbaijani linguistics. B. Chobanzade's investigations on the issues of Azerbaijani linguistics is the main source of modern linguistic research. A. Demirchizade, M. Huseynzade, M. Shiraliyev, A. Abdullayev, T. Hajiyeve, Y. Seyidov and other prominent linguists` source

of ideas of the well-known research on various problems of the Azerbaijani literary language is B. Chobanzade's scientific creativity [1. P. 46].

Neriman Narimanov's dictionary plays a very important role in the development and formation of the science of linguistics. In this dictionary not only the correct use of linguistic terms, but also their equivalents are shown [7]. He was published three books in 1899, and one of those books is the textbook "Turk-Azerbaijan dilinin muxteser serf-nehvi". Here, the author's goal was to create a brief, clear idea of the Azerbaijani language in the readers and students. The textbook was in accordance with positive scientific-methodical requirements. In addition, he wrote works "Nadanlig" (1894), "Dilin belasi" yaxud "Shamdan bey" (1895), "Bahadir ve Sona" (1896–1908), "Nadir sah" (1899), "Ailemi-nisvan" (1910), "Pir" (1913), "Bir kendin serguzeshti" (1915) and others which brought him fame. Y.M. Seyidov wrote: *Nariman Narimanov's works are distinguished from other works in linguistics. Excellent works have been written about linguistic terminology since the past, and thanks to these written works, we can clearly see the development and formation of linguistic terminology today* [9, p.23].

Prominent Turkologist, Professor Farhad Zeynalov (1929-1984) is one of the first Azerbaijani linguists who devoted all his works, in general, his whole life to the study of Turkish languages and Turkology. He can be considered the founder of modern Azerbaijani Turkology after a prominent linguist Bekir Chobanzade. The main instigator for the rise of Turkology to the level of science doctor of philology, professor Farhad Ramazan oghlu Zeynalov's services are very great.

The establishment of the Turkological school in Azerbaijan is connected with his name. In 1962, this great scientist, who became an associate professor of the Department of General Linguistics of the Azerbaijan State University (now BSU), created the Department of Turkology in the same university in 1969. He solved many existing problems in the field of Turkology with his research on the classification of main and auxiliary parts of speech in the Turkish languages, comparative grammar of the Turkish languages, ancient Turkish written monuments. Professor F.R. Zeynalov paid special attention to teaching Turkish languages at a high level, including the Azerbaijani language, which belongs to the Oghuz language group. His investigations in the field of research of Turkish languages created conditions for researching and teaching our native language in a more perfect form. Professor F.R. Zeynalov gave a consistent and systematic classification of the main and auxiliary parts of speech for the first time. Although he died at an early age, the Turkologist scientist left behind a rich scientific legacy. The researcher, whose scientific activity is related to the historical fields of Turkish languages and the Azerbaijani language, is the author of 11 books and 70 scientific articles. Investigations conducted by the scientist during his scientific-pedagogical activities have found its reflection in his articles and theses as well as his monographs and textbooks such as: "Muasir turk dillərində bağlayijilar", "Turk dillerinin mugayiseli grammatikasi", "Turkologiyenin esaslari", "Muasir

turk dillerinde komekchi adlar", "Muasir turk dillerinde goshmalar", "Muasir turk dillerinde modal sozler", "Soz sonluglari leksikgrammatik kategoriya kimi", "Turk dillerinde sifetin kategoriyalari, ifade formalari" etc.. All his works were written in the direction of solving current problems in linguistics according to his time. The textbook "Turkologiyenin esaslari" published in 1981 is of special importance. This book aroused the interest of students as an excellent textbook not only in the universities of our country, but also in some universities of Turkey. In the textbook extensive information is provided about the origin and language characteristics of the Turkish languages, and the alphabet of the Turkish languages is grouped by periods. Farhad Zeynalov's services in the field of Turkology are priceless and undeniable.

Farhad Zeynalov also tried his hand in the field of textual studies, and together with Samat Alizade, he compiled the scientific-critical text of the epic "Kitabi Dede Gorgud" with an extensive introduction. "Kitabi-Dede Gorgud ve dünya shergshunasligi", "Dastani-Ahmadi Harami – Azerbaycanin en gedim edebi abidesi" etc. scientific works are valuable scientific sources in the study of our language history [1, p. 16]. One of the main points worth noting is that F. Zeynalov connected the subject of all his works dedicated to Turkology with the Azerbaijani language. He raised the research of the Azerbaijani language to the level of Turkology and thereby he laid the groundwork for other Turkologists to comment on existing problems to express their opinion.

A well-known scientist with a special place in the Azerbaijani linguistics, a phenomenon researcher of our language, an academician of national and international academies, an honored scientist of Azerbaijan, a laureate of the State award, the founder of the school of onomastics in Azerbaijan, a wonderful pedagogue, a real or honorary member of many scientific societies and organizations Afad Mahammad oglu Gurbanov has a special place in the history of the development of the Azerbaijan linguistic science. There is no field of linguistics that cannot be excluded from the research of a scientist.

Afad Gurbanov, who made great contributions to the development of the Azerbaijani linguistics, comprehensive research and teaching of the language, is the author of "Azerbayjan edebi ve danishig dili" (1965), "Muasir Azerbayjan edebi dili" (1967), "Umumi dilchilitch" (I, II cildler -1988,1993), "Poetik onomastika" (1988), "Azerbayjan dilinin onomalojiyasi" (1988), "Azerbayjan onomastika meseleleri" (1986), Dunyanın dil aileleri" (1994), "Muasir Azerbayjan edebi dili" (2003), "Azerbayjan dilchiliyi problemleri" (Baki, 2004), "Azerbayjan onomalojiyasının esaslari", 2 cildde, (Baki-2004) and a number of monographs and textbooks, up to 500 scientific articles.

A. Gurbanov is a well-known scientist in the field of linguistics. He had great services in the field of general linguistics almost in the 20th century. In the history of world linguistics, he ranks with the scientists such as Panini, Xu Shen, Franz Bopp, Jacob Grimm, Wilhelm von Humboldt, Francois Champolin, Baudouin de

Courtenay, Carl Fossler, Ferdinand de Saussure, Franz Boas, Leonard Bloomfield.

A. Gurbanov's books are dedicated to the explanation and investigation of the theoretical and practical problems facing modern linguistics. While determining the state of development of Azerbaijani linguistics and its prospects, he clarified the science and its characteristics, issues of the creation of science, the formation of linguistics on two – linguistic and philosophical theoretical bases, the problem of classification of sciences, and the problems of defining the history of linguistics. The textbook "Muasir Azərbaycan edebi dili" which was published four times, has attracted attention not only in our country, but also abroad since its first publication. The well-known Turkologist A. Kononov wrote a review for this work and praised it highly. He wrote: *Afad Gurbanov's book "Muasir Azərbaycan edebi dili" reflects not only Azerbaijani literary language materials, but also topics related to the Turkish language materials* [1. p. 54]. In this book, the author has explained the Azerbaijani literary language materials in detail.

The book "Umumi dilchilich" is Afad Gurbanov's masterpiece. That book consists of 7 chapters: "Dilchilich elmi", "Dilchiliyin inkishafi", "Dilchiliyin sahələri", "Dilchiliyin shobələri", "Dilin mahiyyəti", "Dilin mensheyi", "Dil və yazı". This textbook quickly became popular, attracted the attention of the scientific community, and was highly valued by many scientists. The book was also received positively in the former Soviet Union. Even V.I. Kodukhov, a professor of the University of Leningrad (now St. Petersburg) and a linguist, was interested in the same book. After getting acquainted with the book, he called the work *a product of original ideas*.

The book "Umumi dilchilich" that was published first was Afad Gurbanov's concept in the field of general linguistics. He confirmed this concept both after teaching this subject for a long time and after getting acquainted with the concepts of world scientists in this field. Afad Gurbanov reworked those works. As a result, he created the 2-volume work "Umumi dilchilich" which is the result of tireless work. The second edition of both volumes of the book was published in 2004, and the third edition was published in 2014 with a beautiful and elegant design. About the presentation of the 2004 edition of the work in the same year, Z. Guliyev's article entitled "Umumi dilchilich" kitabının tegdimatı" was published in "Azerbaijan" magazine (March 15, 2005). All fields of general linguistics are reflected in this two-volume fundamental work. Here, it can be said that the most pressing problems of world linguistics are covered in detail.

The terms expressing concepts related to the development of each science cause certain changes in terms of semantics and functionality over time. In such cases, the inability of the terms to accurately express the concept, the creation of synonymy, and the appearance of terminological defects made the author think as a specialist scientist. Because the lack of precision of the term creates confusion in the science itself. Taking this into account, the author uses the "vocabulary composition" of the language instead of the "vocabulary

fund", the "philosophical basis" instead of the methodology/methodological basis, the broad meaning of the term "dialect", as well as clarified and specified the meaning of a number of terms such as a series of onomastics – onomastics, onomalogy, ethnonymics, ethnonymy, toponymics, toponymy, anthroponymics, anthroponymy, hydronymics, hydronymy.

In terms of expanding the horizons of linguistics and defining its development areas, the role of onomastic research is great. In-depth research, analysis and scientific summarization of the onomastic lexicon, which has a special place in the vocabulary of the language, helps to solve the complex and necessary issues of our language and history. For the first time in Azerbaijani linguistics, the systematic solution and research of the issues of onomastics is related to the name by prof. Afad Gurbanov. Up to 100 of his articles on onomology have been published, including monographs such as "Azerbaijan onomasticasi", "Azerbaijan onomolojiya meseleləri", "Poetic onomastica", "Azerbaijan dilinin onomolojiyasi". Academician Mammadaga Shiraliyev writes in his article "Azerbajanda onomastika mektebi ve onun gelejeji". *"Azerbaijan dilinin onomolojiyasi" is very valuable not only for our linguistics, but also for world Turkological linguistics. I can say with full responsibility that Afad Gurbanov founded the School of Onomastics of Azerbaijan with this work* [4. p. 14].

The modern Azerbaijani literary language is one of the developed languages with a rich vocabulary. A large part of the vocabulary of this language is made up of the onomastic lexicon – a series of special names. The groups of words included in the onomastic lexicon are the product of certain social and historical development and are an invaluable wealth of words that reflect the life of the people to which they belong. A comprehensive research of the onomastic lexicon is very important for the study of fields of the modern language, dialectology, the language history, etc.

Afad Gurbanov's book "Azerbaijan onomalogiyasinin esasları", which deals with the scientific-theoretical aspect of the problems of onomastics in Azerbaijani linguistics, was published in two volumes. The work was published both in Turkey and in Russia.

Since then, the author was interested in specific names (ethnonyms, hydronyms, zoonyms, cosmonyms and ktematonyms) systematically searched the formation and change of onomastic units, their stylistic features, orthographic and orthoepic problems in a theoretical way. In particular, a number of issues related to anthroponymics in onomastics – Azerbaijani personal names and their characteristics, the system of personal names, the structure of names, the composition of the origin of names, traditions of name selection and naming, rhyming of names, pronunciation of names – have been explained with specific facts. As we know, the history of human names is very ancient. Therefore, there are different divisions in world languages and Turkology regarding the formation of human names. Based on this, the author broadly explaining the unique sources and methods of formation of personal names used in the Azerbaijani language, divides them into two groups: a) pure Azerbaijani names; b) personal names of a foreign language origin.

Professor A. Gurbanov wrote: *"Each word should be thoroughly investigate. There is no meaningless word in the language and there cannot be, every word and phrase has a certain meaning. However, some words can have more than one meaning. Almost all personal names in our language are lexical units with appellative meaning. After the appellative word becomes an onomastic unit, it turns a proper name"* [4, p. 68]. In general, the research of anthroponymic units has taken an important place in the creativity of the scientist, the issues of anthroponymics have been investigated in the historical-linguistic direction, and he tried to eliminate the problems in this field.

Gurbanov is a scientist with scientific creativity covering almost all fields of linguistics. His research interests include the modern Azerbaijani literary language, Turkological linguistics, the language universals, general linguistics, onomology, lexicology, speech culture, translation studies, the language of literary works, stylistics, and higher education pedagogy and methodology.

Academician Aghamusa Akhundov is one of our scientists who created a school in the Azerbaijani linguistics. A.Akhundov is the author of such works *"Dil ve uslub meseleleri"*, *"Felin zamanlari"*, *"Dilchiliyə girish"*, *"Umumi dilchilich"*, *"Riyazi dilchilich"*, *"Azerbaijan dilinin fonetikasi"*, *"Dil ve edebiyat"* (in 2 volumes), *"Azerbaijan dilinin izahli lugheti"*. These works are dedicated to the current problems of language history, the modern structure of the Azerbaijani language, the language theory, and general linguistics.

The world-wide Azerbaijani linguist – Aghamusa Akhundov said: *"The Azerbaijani language is my destiny. If you love it like your mother tongue, it is also my art. It's my sleepless nights, my searches"* [11].

In the creativity of A. Akhundov his monograph *"Azerbaijan dilinin fonemler sistemi"* can be especially noted. For the first time, the scientist summarized the phonetic system of the Azerbaijani language on the basis of experimental analysis and presented it at the theoretical level. In the creativity of A. Akhundov a language and society, a language and culture, social differentiation of the language, sociological aspects of the language evolution, language system, actual problems of the language system which attract worldwide attention related to general linguistics and language theory have been solved. For the first time in Azerbaijani linguistics, methods and methodology, sociological, logical, psychological, physiological, acoustic, distributive, mathematical, statistical research methods of learning the language have been defined. Aghamusa Akhundov was published the book *"Umumi dilchilich"*, the masterpiece of his scientific creativity. In the book, a brief history of the science of linguistics is given, the philosophical and social issues of the language are illuminated, the internal system and structure of the language, and the methods of linguistics are analyzed.

To study the actual problems of the Azerbaijani language, which has an ancient history, to reveal the social nature of the language, its specific mechanism objectively, to raise our language to a high level of development from Mirza Kazimbey and made prominent intellectuals and scientists of our nation think until today.

In the 20th century, with the academic researches of B. Chobanzadeh, Azerbaijani linguistics, in general, Turkology entered a new stage of development, and an army of highly respected linguists and Turkologists was created in Azerbaijan. In this sense, one of the founders of Azerbaijani Turkology is the outstanding linguist Alovzat Abdullayev. He had a unique creative concept. Scientific works of the scientist were published in Germany, France, Türkiye, Russia and Central Asian countries and caused great interest. A. Abdullayev, who has a wide range of creativity, is not only engaged in one field of linguistics, but also phonetics, orthography, etymology, historical grammar, morphology, syntax, speech culture, etc., and created significant works dedicated to the most current problems of Turkology as a whole. Specialization and additional categories, adverbs, predicates, complex sentences of mixed type, transformation of constituent parts of subordinate complex sentences and other issues were compiled by him for the first time and included in the higher school program. A. Abdullayev, a state prize winner, a full member of the Turkish Language Institute, a member of the International Congress of Altai Scholars, rendered invaluable services in the training of many Turkologist scholars in Azerbaijan and outside the borders of our country. Prof. Mehman Musaoğlu writes: *"Azerbaijani Linguistics in the Context of Turkish Linguistics and Prof. Dr. Elövset Abdullayev's article titled 'The School of Vocabulary'...12 years...during the period of the Soviet Union, and after that, during the time I worked in Türkiye, I always identified myself as the famous linguist Türkologist Prof. Dr. As a representative and student of Elovset Abdullayev's school, I always tried to continue where my teacher left off... Turkishness= Turkish knowledge= Turkish language knowledge= Turkish grammar and linguistic knowledge..."* [1, p25].

One of our prominent scientists is Honored Scientist, State Prize Laureate, Corresponding Member of ANAS, Doctor of Philological Sciences, Professor Abdulazal Demirchizade. Demirchizade who was a student of the great Turkologist, professor Bekir Chobanzade school, gave valuable information about the rules of orthography in the book *"Azerbaijan dili orfoepiyasının esasları"* published in 1969. The scientist, throughout his creativity, expressed his objection to inappropriate foreign words in the language and convey his attitude to this problem in his works. The author dedicated the books *"Dilin lughet terkibi haqqında"* (1952), *"50 soz"* (1962), *"Muasir Azerbaijan dilinin esas lughet terkibi və grammatic guruluşu"* (1965), *"Azerbaijan dilinin uslubiyyati"* (1962) to the investigation of the vocabulary of the Azerbaijani language. In these works, he tried to carefully summarize his ideas about words and meaning, the lexical and grammatical meaning of the words, vocabulary, the main and additional parts of the vocabulary, general, necessary and special characteristics each of them. It is possible to get enough information from these works to learn the rules of development and enrichment of the vocabulary. He did his best in the field of initial research of problems related to the grammatical structure of the language, morphology and especially syntax.

These works of A. Demirchizade are important sources in the study of lexicology.

A. Demirchizade is the author of the textbook "Muasir Azerbaijan dili" (phonetics), which is included in the gold fund of our linguistics. More than twenty his books and more than two hundred his scientific articles have been published. In these writings, the scientist expressed his opinion on linguistic issues such as phonetics, etymology, stylistics, etc. The author's "Azerbaijan dili tarixi xulaseleri" (1938), "M.F.Akhundov dil hagginda ve Akhundovun dili" (1941), "Azerbaijan dilinin tarixi" (1948), "Azerbaijan edebi dilinin inkishaf yollari" (1959) etc. books are valuable scientific sources for studying the history of our language.

Prominent linguist of Azerbaijan, the creativity of academician Tofiq Hacıyev, who became a full member of ANAS, is wide and multifaceted. Academician Tofiq Hacıyev's services in the development of the Azerbaijani education, enlightenment, Turkology are unexampled. The textbook "Azerbaijan edebi dilinin tarixi" by the eminent scientist was published in 1976. In 2012, the author reprinted the mentioned work. Using the works of our valuable classics and ancient manuscripts, he studied the creation, formation of the Azerbaijani literary language, its norms and styles at a high level.

The textbook "History of Azerbaijani Literary Language" by the eminent scientist was published in 1976. In 2012, the author reprinted the mentioned work. Using the works of our valuable classics and ancient manuscripts, he studied the creation and formation of the Azerbaijani literary language, its norms and styles at a high level. It is possible to say that the history of the literary language in Azerbaijan improved and became more widespread starting from the 19th century. The 19th century is a turning point in the history of socio-economic and cultural development of the Azerbaijani people. Tofiq Hacıyev writes: *"One of the cultural achievements of the era is the development of the press, which is a strong impetus to the popularization of the national literary language"* [1. p.40]. The eminent scientist emphasizes that the press polished the literary language and created a perfect norm, applied and stabilized this norm, preaches to the readership and promotes it. The norms of the literary language are a historical event and it is formed in connection with the process of formation of the nation, the national language. Enrichment of the vocabulary of the literary language, introduction of borrowed words into the language is realized through journalistic style. Therefore, journalistic style is considered the most popular style of literary language. If earlier the artistic style was the leading style, after the journalistic style emerged, it became the leading style of the Azerbaijani literary language. So, at the same time the journalistic style brings the literary language closer to the colloquial language and acts as an active tribune of the struggle for the national language. But all these directs to a new direction of the future development of publicist style, which occupies an important place in the system of styles. Academician T. Hacıyev's textbook "Azerbaijan edebi dilinin tarixi" is priceless for studying the historical landscape of journalistic style.

Professor Yusif Mirahmed oğlu Seyidov, who gave a new direction to Azerbaijani linguistics and had a great role in the teaching and development of morphology and syntax, systematically dealt with grammar. The honored scientist was one of the great scientists who always took care of the purity of our language and carried out serious propaganda in this field. Among the main services of the linguist, due to his scientific content and methodological excellence, more than two hundred scientific works, more than thirty books dedicated to the theoretical and applied issues of linguistics, including that prepared and were published for the students of the Faculty of Philology such as "Muasir Azerbaijan dili" IV parts, "Sintaxis", "Azerbaijan dilinin grammatikasi", "Morfologiya" and etc. takes the main place as the author of high school textbooks. Professor Yusif Seyidov, who played an exceptional role in the development of Azerbaijani linguistics, was one of the scientists distinguished by the breadth of his research in the field of literary studies, as well as linguistics. He created a concise chronicle of the linguistic and literary studies of the Azerbaijani people in his works "Yazichi ve dil", "Sozun shohreti", "Sozun gudreti", "Sozun hikmeti" etc. collected and systematized the opinions of Azerbaijani writers who lived in the XI-XX centuries about words and language [1, 42].

One of our scientists who has conducted serious research in the field of general linguistics in Azerbaijan is Abulfaz Rajabli, professor of the Department of General Linguistics of Baku State University. A. Rajabli's first research on general linguistics was the book "Dilchiliye girishden tapshiriglar", which he was published in 1979. Although the book is small in volume, it is valuable in terms of being the first work of a young researcher. After that, he consistently dealt with general linguistic issues and published a large-volume book called "Dilchilich tarixi". This book has attracted the attention of experts due to a number of parameters and has been highly appreciated. It should also be noted that the author continued his research on this work and was published it in two volumes. In a comparison of both publications, the integral elements exceed the differential elements. The differential elements show themselves in the fact that in the final version of the work, the discussions about

V. von Humboldt and F. dö Sössür were completely rewritten.

Rajabli can be compared with any classical linguist in the world in terms of the number of books which he wrote in the field of general linguistics. Scientist's Books such as: "Nezeri dilchilich", "Dilchilich metodlari", "Struktur dilchilich", "Sosiolingvistika", "Tipoloji dilchilich", "Universaliler dilchiliyi", "V.fon Humboldt – umumi dilchiliyin banisi kimi", "U.D.Uitni-linqvist kimi", "F.dö Sossurun dilchilich gorushleri" have become table books for scientists, teachers, and students in terms of studying general linguistic issues in Azerbaijan. A. Rajabli is considered an innovative scientist mostly due to his Turkological research.

Azerbaijani linguistics, which does not lag behind world linguistics and Turkology is developing on a rising line. Azerbaijani linguistics, which was laid the

foundation in the Middle Ages, developing very rapidly increased its reputation. In the following periods, our scientific grammar was formed, linguists with strong potential were trained, new areas of our linguistics appeared, the theoretical level of our linguistics increased, and its application expanded.

As a result, it was analyzed that the onomastic lexicon makes up a large part of the vocabulary of the modern Azerbaijani literary language, and that the vocabulary reflecting the life of the people it belongs to and included in the onomastic lexicon being an invaluable wealth of words. It was understood that it is necessary to conduct new research in order to succeed in solving the ontological and methodological problems of linguistics, to conquer new horizons in the philosophy of the language and the philosophy of linguistics, to reveal and show the connection of linguistics with society, literature, culture, informatics and other fields.

It was clarified that it is necessary to bring the world heritage of linguistics to our country along with the creation of a strong material base that ensures the future development of our linguistics. Regarding the position of our independent state in the world civilization in modern times, it was analyzed that it is necessary to study and teach our language both inside the country and abroad, as well as the integration of Azerbaijani linguistics into the world linguistics.

## References

1. Materials of the international scientific conference on "Azerbaijan filologiyasının inkişafında Bakı Dövlət Universitetinin rolu" 83 p.
2. Afad Gurbanov "Azerbaijan Onomastikasi" - Cyril - Baku - 1987 -115 p.
3. Chobanzade Bekir: life and creativity [https://az.wikipedia.org/wiki/B%C9%99kir\\_%C3%87obanzad%C9%99](https://az.wikipedia.org/wiki/B%C9%99kir_%C3%87obanzad%C9%99)
4. Azizkhan Tanriverdi "Türkologiyamızın Afad Qurbanovu" Baku, 2018, 252p.
5. F. Yadigar-Veysalli. "Fonetika və fonologiya meseleləri". Baku, 1993, 310 p.
6. Kashghari M. "Divanu lüğhat-it-turk", publishing house: Ozan, 2006, 512p.
7. Narimanov N. "Azerbaijan dilinin izahli lugheti", 100p.
8. R. Mehdiyev "İjtimai və humanitar elmlər: zaman kontekstindən baxış" ("Azerbaijan" newspaper, December 8, 2009, N: 272)
9. Seyidov M. "Azerbaijan xalqının soykokunu dushunerken", 1989, p.442
10. <https://az.wikipedia.org/wiki/T%C3%BCrkology>
11. <https://525.az/news/185484-world-scale-Azerbaijani-linguist-Agamusa-Akhundov>.



**FEATURES OF THE STRUCTURE OF ASEMANANTIC ROOT MORPHEMS (BY THE MATERIAL OF THE AZERBAIJANIAN LANGUAGE)****Yadigar Veli oglu Aliyev***Doctor of philological sciences**Ganja State University, Azerbaijan*ORCID: [0000-0002-9274-4300](https://orcid.org/0000-0002-9274-4300)**Ramila Yusif kizi Suleymanova***Doctor of Philosophy**Azerbaijan State Agricultural University, Azerbaijan*ORCID: <https://orcid.org/0009-0006-3008-2854>**ОСОБЕННОСТИ СТРОЯ АСЕМАНТИЧЕСКИХ КОРНЕВЫХ МОРФЕМОВ  
(НА МАТЕРИАЛЕ АЗЕРБАЙДЖАНСКОГО ЯЗЫКА)****Ядигар Вели оглы Алиев***доктор филологических наук**Гянджинский государственный университет, Азербайджан***Рамила Юсиф кызы Сулейманова***кандидат филологических наук**Азербайджанский государственный аграрный университет, Азербайджан***Abstract**

In some asemanantized correction words the suffixes change their initial form by undergoing a phonetic change. Grammatical suffixes with asemanantized roots are relatively rare. Many of them have lost their functionality in the modern Azerbaijani language. Some of the lexical suffixes that come into morphological contact with asemanantized roots are still used in the Azerbaijani language today.

In the process of development towards asemanization, two stages are distinguished that lead to a change in the structure of the word; stages in which the phonetic structure and morphological structure are functional. In the first stage, the phonetic structure of monosyllabic words undergoes various changes. Phonetic variants appear as a result of sound transitions and phonetic events. Sound transitions cause structural and semantic changes.

In the second stage, the intensity of changes in the phonetic structure decreases. One of the phonetic events of the previous stage, only metathesis is observed. In general, there are no changes in the phonetic structure of the root. Metathesis serves a morphological structure rather than a phonetic structure. In the second stage, the asemanantized root and the suffix together form an indivisible structure (As in the words of *aldan*- "to be deceived", *danış*- "to talk", *göləş*- "to wrestle"). In complex words, the morphological structure is simplified.

**Аннотация**

Суффиксы, подвергающиеся фонетическим изменениям в некоторых производных словах с асемантическими корнями, обычно утрачивают первичную форму. Словоизменяющиеся аффиксы в составе слов с асемантическими корнями немногочисленны. Эти аффиксы в современном языке лишены грамматической функциональности. Некоторые словообразовательные аффиксы в составе лексических единиц с асемантическими корнями употребительны в современном азербайджанском языке.

В процессе асемантизации первичных корней отличаются две стадии развития; связанные с фонетическим и с морфологическим строением. В первой стадии звуковой строй односложных слов подвергается некоторым изменениям. В результате чередования звуков и фонетических явлений образуются фонетические варианты. Звуковые переходы приводят как к структурным, так и к значительным семантическим изменениям.

На втором этапе развития уменьшается интенсивность фонетических изменений. В числе фонетических явлений связанные с предыдущим этапом наблюдается только метатеза. А в целом в фонетическом строении асемантических корней не возникают изменения с фонематическим характером. А явление метатезы, проявляющийся в морфологическом контакте корней и суффиксов имеет значение для морфологического строя, нежели фонетического. Впоследствии асемантические корни вместе с аффиксами образуют неразделяемую структуру и образуются простые слова (например, в словах *aldan*- «быть обманутым», *göləş*- «бороться» и др.). Наблюдается процесс упрощения сложных слов.

**Keywords:** root, word, suffix, morphological structure, meaning**Ключевые слова:** корень, слово, суффикс, морфологический строй, значение**Введение**

Первичные корни проходят две стадии в процессе развития по направлению к асемантизации. Сначала становятся функциональными фонетические, а затем и морфологические структуры. При

этом изменяется звуковой строй односложных слов. Образуются фонетические варианты и семантические различия. Односложные асемантические корни отражают слоговые структуры согласный-гласный-согласный (СГС), гласный-согласный (ГС;

*il-əri>irəli* «вперед»), согласный-гласный (СГ; *tü-tək* «труба», *ba-ğ* «сад»). На втором этапе отсутствуют фонематические изменения в фонетической структуре корня.

Фонетическое явление служит морфологической структуре. Метатеза появляется в морфологическом контакте корня с суффиксом. Последний согласный корня меняется местами с первой согласной суффикса (*yas-tıq>yat-sıq* «подушка»). На этом этапе корень, утративший самостоятельность значения образует неделимую структуру вместе с корнем (*al-dan* «быть обманутым», *dan-ıř* «говорить», *gü-lař* «бороться»).

Морфологический строй также упрощается в сложных словах. Упрощенные сложные слова имеют разные способы образования.

### 1. Асемантизация в производных словах

В некоторых производных словах с корнем, утратившие самостоятельность значения суффиксы подвергаясь фонетическим изменениям утрачивают первичную форму. А.Рахимов пишет: Слово *tarla* состоит из компонентов *tar* и *la*. Первая составная часть *tar* не сохранил первичную фонетическую структуру и семантику на азербайджанском языке. И компонент *-la* не подвергался никакому изменению. Конечно, правильнее сравнивать суффикс *-la* с одинаковым суффиксом, обозначающим пространство в составе слов *yayla-* («провести лето»), *kışla-* («зимовать»), а не с глаголом образующим суффиксом *-la*. Если принять во внимание развитие закрытого слога в азербайджанском языке в сторону открытого слога (напр. *yaylaq>yayla-* «место для проведения летнее время», «провести лето», *qışlaq>qışla-* «зимовка», «зимовать»), можно сказать, что слово *tarla* происходит от более старого варианта *tarlaq* (6, с. 67).

Вследствие возникновения метатезы в слове *yastıq* «подушка» (так как последняя согласная корня и первая согласная суффикса меняется местами) при морфологическом контакте корня и суффикса изменяется звуковой состав как корня, так и суффикса. Также возможно вернуть первичный вид суффиксной морфемы, восстановив слово подвергшееся смещению согласного. Выполняя такую операцию выясняется, что суффиксная морфема имеет фонетическую структуру на *-sıq*: *yastıq>yatsıq* (в слове *yatsıq*; *yat-* «спать»). Суффикс встречается в древнетюркских письменных памятниках в форме *-sık*. Суффиксная морфема образует существительное от корня глаголов: *açsık* «голод», *todsık* «сытость». Лексические единицы с суффиксом *-sık* употребляются в языке древнетюркских письменных памятников. *Türk bodun açsık to(d)sık ömæzsæn, bir todsar açsık ömæzsæn* (Памятник в честь Кюльтигина, южная сторона, 8-я строка. Перевод: Тюркский народ, ты не будешь знать, что такое голод и сытость. Если вы не сыты, вы не будете знать, что такое голод).

Словоизменяющих суффиксов среди суффиксных морфем с асемантическими корнями сравнительно немного. Словообразовательные суффиксы, вступающие в морфологическую связь с корнями,

утратившими самостоятельность значения, до сих пор употребляются в нашем языке и легко различимы в структуре слова.

Словоизменяющие суффиксы – это по большей части окаменевшие суффиксы, утратившие свою функциональность в нашем современном языке. Если восстановить доперемещенное положение согласных *r* и *l* в слове *irəli* («вперед»), подвергшихся взаимному смещению, то можно определить направительный суффикс *-əri* того же слово. Суффиксная единица наблюдается в словах *içəri* («внутри»), *uxarı* («вверх»), а также в составе слово *dışarı* («снаружи»). Направительный суффикс *-ra* утративший свою функцию в современном языке, также является окаменевшим морфемным компонентом слов *ora* («туда»), *bura* («сюда»), *hara* («куда»). Еще один окаменевший суффикс-морфема *-ırğa* в словах *qovırğa* («обжарка пшеницы»), *yadırğa* («забывать»), *qabırğa* («ребро»). Морфема проявляется как суффикс инфинитива с алломорфами *-ırge*, *-orğa*, *-örge* в болгарской группе тюркских языков: *aytırğa* («сказать»), *barırğa* («идти»). Тюркологи считают, что оно произошло от сочетания суффикса причастия *-ır* (*-ır*) суффиксами направительного падежа *-ğa*, *-ge* (10, с. 487). Акад. Т.И.Гаджиев отмечает, что наряду с кипчакскими чертами в нормах азербайджанского литературного языка присутствуют и болгарские элементы. Он пишет: «Неправильно видеть в азербайджанском языке только огузско-кипчакские черты. Если огузский язык включает в себя несколько племенных языков в праве просторечия, то безусловно, азербайджанский язык охватывает несколько языков на уровне огузского языка. Здесь также сконцентрированы черты племенных-просторечных языков хазар, сувар, емек, аргу, ягма, уйгур и др. В то же время эти языки берут свое начало в недрах азербайджанского просторечия. Например реликт характерный для болгарского языка (и языков) слова *samsa* («нос») до сих пор сохраняется в некоторых словах (*sümsünmək* «бродить как пес», *sümsük* «бродящий как пес», *sımsıq/sımsırq* и вариант *mısmırq* с метатезой согласных *s* и *t* в значении «скорчить лицо») употребляемых в просторечии. Причастный суффикс *-mıř*, действующий как сегодня, так и исторически как литературная форма, является особенностью болгарского языка и употребляется вместе с суффиксом *-an*, который является огузским элементом» (2, с. 60).

Таким образом, в процессе развития от односложного к многосложному, от первичных корней к асемантизацию можно выделить два этапа:

а) этап на котором фонетическая структура функционирует;

б) этап на котором морфологическая структура функционирует.

На первом этапе в фонетической структуре односложных слов происходят различные изменения. В результате фонетических событий и звуковых замен возникают фонетические варианты. Звуковые переходы изменяя структуру и форму корня, они также вызывают различия в значении. Односложные корни представлены несколькими слоговыми

структурами. Н.Баскаков пишет: «Для тюркских языков характерны шесть основных типов слогов, которые совпадают с шестью корневыми морфемами. В зависимости от состава фонемы слоги состоят из одной гласной (V), гласной и согласной (VC, CV), гласной и двух согласных (CVC, VCC), гласной и трех согласных (CVCC). Они, в свою очередь, делятся на два основных типа: V и CVCC» (9, с. 179). Среди односложных корней, утративших самостоятельность значения есть примеры того, что они кроме слоговой структуры согласный-гласный-согласный, отражают слоговых структур гласный-согласный (VC; *il-əri* «вперед»), согласный-гласный (CV; *tü-tək* «дудка», *bağ-la* «закрывать»).

На втором этапе снижается интенсивность изменений фонетической структуры. Проявляется только одно из фонетических событий – метатеза, связанных с предыдущим этапом. А фонетических изменений в фонетической структуре корня в целом нет. Метатеза, являющийся единственным фонетическим явлением, также связан с морфологической структурой (наряду с фонетической), и собственно само фонетическое явление выявляется морфологической структурой. Потому что метатеза происходит при морфологическом контакте корня с суффиксом; первая согласная суффикса меняется местами с последней согласной корня (напр. *yas-tiq* > *yat-siq*, «подушка»; *st* > *ts*). Именно на второй стадии корень, утративший самостоятельность значения, образует неделимую структуру вместе с суффиксом и образуется новое слово (напр.: в словах *al-dat* «обмануть», *dan-ış* «говорить», *gü-ləş* «бороться»). Ф. де Соссюр также пишет о французском языке, что одним из грамматических последствий фонетических изменений является то, что отдельные значимые части слова теряют свою самостоятельность: слово становится неделимым целым. Примеры: на французском *enemi* «враг» (сравните: на латинском *in-amicus* «не друг» - *amicus* «друг») (7, с. 280). В результате образуются многосложные корни и новые слоговые структуры. Если на первом этапе фонетические (и другие) изменения проявились преимущественно в слоговой структуре согласный-гласный-согласный (CVC), иногда гласный-согласный (VC), то на втором этапе число слоговых типов увеличивается за счет асемантизированных корней.

Проф. В.Ахмедов кратко описывает процессы второго типа таким образом: «В лексическом составе азербайджанского языка есть слова, подвергшиеся процессу соединения различных суффиксов с односложным древним корнем слова или его фоновариантами. Этот процесс имеет очень давнюю историю. В результате многие слова произошли от древнего односложного корня» (1, с. 28).

## 2. Процесс асемантизации и упрощения морфологической структуры в структурно сложных словах

Проф. Ю. Мамедов выделяет три пути развития корней, которые теряют свою самостоятельность составляют свой след в других словах и выражениях. Он пишет: «В течение определенного периода развития языка некоторые односложные

слова принимая два суффикса имеют близкую (или одинаковую) значению с предыдущим словом. Напр.: *yed-* // *yedəklə-* «буксировать», *düg-* // *düyünlə-* «завязывать», *sin-* // *sindir-* «сломать», *sor-* // *soraqla-* «спрашивать», *quc-* // *qucaqla-* «обнимать». Древний односложный корень и производное от него слово некоторое время используется параллельно и образуются синонимы... В ином направлении пошло развитие другой части односложных слов, утративший самостоятельность и теперь сохраняющей свой отпечаток в других словах и выражениях. Односложный (и частично двусложный) корень принимает только один суффикс (суффикс залога глагола). Хотя вначале суффикс создает соответствующее лексико-семантическое значение, позднее сливается со словом и утрачивает созданное им значение. Хотя структура слова изменилась, его значение практически не изменилось. Например, в письменных памятниках глагол *toğ-* // *doğ-* употребляется в значении «родиться». Теперь это значение выражается глаголом *doğul-* («родиться») созданный от прибавления суффикса *-ul* к корню *doğ-* «родить». Третья часть первичных корней, утратившая свою самостоятельность и сохраняющая теперь свой след в других словах и выражениях, прошла иной путь развития. Значение древнего слова выражается собственными словами азербайджанского языка (и непроизводными от него) или заимствованными лексическими единицами не имеющими с ним лексико-семантической связи. Древнее слово становится архаичным или выходит из языка, оставляя лишь следы в других словах и выражениях (*ari* – *təmiz* «чистый») (5, с. 60-62).

С установлением упомянутого выше второго этапа (на которой морфологическая структура функционирует) идет процесс стабилизации односложных первичных корней, различных фоновариантов в словарном составе языка. Каждый из них становится отдельной единицей лексического состава. Меняется характер грамматических связей между другими корневыми или суффиксными единицами, которые сливаются с односложным корнем и становятся формальным элементом, утратившим свою функциональность. Ф. де Соссюр пишет, что фонетическая эволюция изменяет форму слов и разрывает связывающие их грамматические связи (7, с. 289). Грамматические значения теряются в односложных корнях, изначально содержащих суффикс (или слитых с суффиксом). Иногда грамматическое значение, создаваемое суффиксом, смешивается с общим лексическим значением слов. Хотя слова и содержат грамматические суффиксы, они представляют собой не что иное, как формальные элементы, утратившие свою функциональную самостоятельность. Однако в слове *yarış* («соревнование») появляется и значение взаимности, создаваемое этим суффиксом. В результате, как писал Б. Ахмедов, корень и его фоноварианты претерпевают процесс превращения в самостоятельные слова с добавлением различных суффиксов. По этой причине через определенный промежуток времени каждый из различных суффиксов с одинаковым

корнем образуется отдельное слово (1, с. 28). При этом изменение морфологической структуры происходит не только у слов с грамматическими или лексическими суффиксами. Г. Гасанов пишет об упрощенных первичных корнях с суффиксом, что изменения в фонетическом строении слов влияют и на его структуру и морфемы, участвующие в образовании этого слова. Корень и слово сливаются, что затрудняет определение их границ. Поэтому целесообразнее делить производные слова на функциональные единицы. Производные слова состоят как минимум из двух функциональных единиц. Первое из которых является неизменяемой (коренью или основой), выражающим основное значение, а второе изменяемой частью (3, с. 33).

Функциональными единицами сложных слов безусловно являются лексические единицы. Способы образования упрощенных сложных слов различны. Следовательно и грамматические связи их компонентов неодинаковы. Компоненты упрощенных лексических единиц комбинируются по разному, теряя сложную структуру. Некоторые имеют модель атрибутивного словосочетания, другие состоят из слов со схожими и сходными значениями.

Третья часть представляет собой сочетание слов с разным значением. В современном азербайджанском языке сложные слова употребляются в составе первого и второго типов атрибутивных словосочетаний (напр. *qaraqaş* «чернобровый», *qaragöz* «черноглазый», *stolüstü* «настольный», *şəhərlərarası* «междугородный»). Даже в упрощенных сложных конструкциях наблюдается определенная модель атрибутивного словосочетания. В этом случае один или обо компонента могут подвергнуться фонетическому изменению. В результате составная часть отличается от исходной фонетической формы. Слово *yumurta* («яйцо») состоит из фонетически измененного слова *yumru* («круглый») и из слова *tag* («гора») подвергшийся элизию в ауслауте. Последний согласный второго компонента данного слова присутствует в слове *yumurtğa* в современном туркменском языке (см. 8, с. 999) подвергшийся местоизменению с гласным звуком (*yumurta* – *yumuru tag* - *yumurtğa*). А первый компонент сохраняет свою фонетическую форму в слове *yumrutka* («яйцо») в современном гагаузском языке. Первичная форма слова, по-видимому была в виде *yumru tag* («круглая гора»). Для сравнения отметим, что в письменных памятниках азербайджанского языка слово *yumru* («круглый») употребляется как определения слово *tag*. В памятнике «Kitabi-Dədə Qorqud» («Книга отца нашего Коркута») употребляется словосочетание *tag yumrusu* («круглость, т.е. вершина горы»). *Bir yigidin Qara tag yumrusınca malı olsa, yıǵar-dərər, nəсібindən artıǵın yeyə bilməz* (4, с. 31). Если у храбреца богатство столько же, сколько вершина горы, он накопит и не сможет съесть/тратить больше своей доли). Хотя основу упрощенного сложного слова составляет атрибутивное словосочетание первого типа, характер связей (в том числе грамматических связей) между компонентами не такой, как в сложных словах с той же структурой.

Вполне вероятно, что семантическая связь (как атрибутивная семантическая связь в атрибутивном словосочетании первого типа) между компонентами является пассивной, поскольку второй компонент претерпел фонетическое изменение (элизия; *tag>ta*). И вообще сама грамматическая связь неактивна.

Один или оба компонента состоящие из семантически близких лексических единиц в упрощенных сложных словах состоят из слов утрачивающие самостоятельную значению. Компоненты в таких лексических единицах объединяют мотивационные сходства. Между компонентами образуются семантические и грамматические связи. В современном азербайджанском языке сложные слова, состоящие из семантически близких лексических единиц, объединяет предметы, события, процессы (напр. *el-oba* «народ», *söz-söhbət* «беседа», *ev-eşik* «дом», *adət-ənənə* «традиция», *gül-çiçək* «цветы») или признаки (*daşlı-kəsəkli* «каменный», *güllü-çiçəkli* «цветочный», *elmi-kütləvi* «научно-популярный»), которые тесно связаны друг с другом. Имея сходные грамматические формы они объединяются сочинительной связью. В сложных лексических единицах с асемантическими корнями, близкие по значению слова сочетают в себе сходные признаки, относящиеся к одному предмету. Корень *kər-* утративший самостоятельную значению в слове *kərpic* («кирпич») означает «резать». Первичный корень наблюдается в словах *kərənti* («косылка»), *kərki* («резец»), имеющих между собой семантическую связь. Другая часть данного слова является фонетически измененной формой глагола *biç-* (*mək*) в значении «резать». Оба части слова с близким лексическим значением в какой-то мере отличаются друг от друга. Глагольный корень *kər-* означает «резать», а слово *piç-/biç-* означает «вырезать по форме, придавая ей определенную форму». Проявляется связь между этим значением второго компонента (*piç-/biç-*) и общей семантикой слово *kərpic* «кирпич» («строительный материал из глины, вырезанный по форме и обожженной на огне»). После того, как корни теряют самостоятельность значения, исчезают и грамматические связи между компонентами. Процесс заканчивается превращением сложной лексической единицы в простое слово. Говоря об упрощении сложных слов, Г. Гасанов справедливо отмечает, что упрощение производных слов обусловлено либо фонетическими изменениями, либо семантической архаизацией его компонентов (3, с. 33).

**Заклучение**

В производных словах с асемантическими корнями суффиксы претерпевают фонетические изменения и теряют первоначальную форму. Словоизменяющие суффиксы употребляемые с асемантическими корнями составляют меньшинство, а некоторые словообразовательные суффиксы используются в современном азербайджанском языке. Изменения в фонетической структуре слов с асемантическим корнем сказываются на структуре слова. Изменения морфологической структуры происходят не только в словах с лексическими, или грамматическими суффиксами. Слова со сложной структурой становятся простыми лексическими единицами. Один из компонентов, или оба компонента упрощенных сложных слов являются корнем, потерявший самостоятельность значения. В сложных лексических единицах с асемантическим корнем близкие по значению слова выражают близкие признаки, относящиеся к одному и тому же предмету.

**Литература**

*На азербайджанском языке*

1. Əhmədov B.B. Morfoloji sadələşmə və tarixi söz yaradıcılığı // Türk dillərinin tarixi morfolojiyasına dair araşdırmalar. Bakı: Bakı Universiteti nəşriyyatı, 1990, s. 28-32

2. Hacıyev T. Azərbaycan ədəbi dillinin tarixi: dərslik. 2 cildə. I cild, Bakı: Elm., 2012, 474 s.

3. Həsənov Q.M. Mürəkkəb leksik vahidlərin sadələşməsi // Azərbaycan dili leksikasının məsələləri. Bakı: Azərbaycan nəşriyyatı, 1989, s. 33-36

4. Kitabı – Dədə Qorqud. Bakı: Yazıçı, 1989, 264 s.

5. Məmmədov Y. Müstəqilliyini itirən köklərin çoxhəcalılığa doğru inkişafı haqqında // Azərbaycan filologiyası məsələləri. II buraxılış. Bakı, "Elm", 1984. s. 59-66

6. Rəhimov A. Azərbaycan dili üçün asemantikləşmiş bəzi kök morfemlərin izahında M.Kaşğarlı "Divan"ının rolu // AFM, II buraxılış. Bakı: "Elm", 1984, s. 66-69

7. Sössür Ferdinand de. Ümumi dilçilik kursu. Bakı: BDU nəşriyyatı, 2003, 403 s.

*На турецком языке*

8. Karşılaştırmalı Türk Lehçeleri Sözlüğü. I c., Ankara: Başbakanlık Basınevi, 1991, 1183 s.

*На русском языке*

9. Баскаков Н.А. Историко-типологическая фонология тюркских языков. Москва: "Наука", 1988, 208 с.

10. Сравнительно-историческая грамматика тюркских языков. Морфология. Москва: Наука, 1988, 558 с.

# CONSTRUCTSEME AS A FACTOR EXPRESSING STRUCTURAL-SEMANTIC AND PREDICATIVE PROPERTIES OF SYNTACTICAL CONSTRUCTION (BY THE MATERIAL OF THE ENGLISH LANGUAGE)

**Saurbaev R. Zh.**

*Candidate of Philological Sciences, Professor of the Department of Foreign Philology, Toraigyrov University, Pavlodar, Kazakhstan*

**Zhumasheva A.Sh.**

*Doctor of Philology, Professor of the Department of Foreign Philology, Toraigyrov University, Pavlodar, Kazakhstan*

**Zhetpisbay A.K.**

*Candidate of Philology, Associate Professor of Higher School of Humanities, NPJSC A. Marghulan Pavlodar Pedagogical University, Pavlodar, Kazakhstan*

**Omarov N.R.**

*Candidate of Philology, Associate Professor of Higher School of Humanities, NPJSC A. Marghulan Pavlodar Pedagogical University, Pavlodar, Kazakhstan*

## КОНСТРУКТСЕМА КАК ФАКТОР ВЫРАЖАЮЩИЙ СТРУКТУРНО-СЕМАНТИЧЕСКИЕ И ПРЕДИКАТИВНЫЕ СВОЙСТВА СИНТАКСИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ (НА МАТЕРИАЛЕ АНГЛИЙСКОГО ЯЗЫКА)

**Саурбаев Р.Ж.**

*Кандидат филологических наук, профессор кафедры иностранной филологии, Торайгыров университет, Павлодар, Казахстан*

**Жумашева А.Ш.**

*Доктор филологических наук, профессор кафедры иностранной филологии, Торайгыров университет, Павлодар, Казахстан*

**Жетписбай А.К.**

*Кандидат филологических наук, доцент Высшей школы гуманитарных наук НАО «Павлодарский педагогический университет имени Элкей Марғұлана», Павлодар, Казахстан*

**Омаров Н.Р.**

*Кандидат филологических наук, доцент Высшей школы гуманитарных наук НАО «Павлодарский педагогический университет имени Элкей Марғұлана», Павлодар, Казахстан*

### Abstract

In this article, the authors in the framework of paradigmatics reveal a syntactic phenomenon, defined by researchers as a constructseme in which the structural-semantic and predicative properties of the syntactic construction are concluded, expressed by the general properties of the part of the syntactic unit containing a whole-some utterance that lies beyond the boundaries of the traditional sentence delimited by punctuation and a common syntagma but having a common semantic whole and connected with the previous construction, the constructseme in its turn complets and refines the basic structure.

Syntactic theory has received some new directions, which in general should be defined as semantic syntax. Along with the development of semiotics, the science of the sign, semantic syntax as a science contributed to the emergence of the idea that a sentence is an integral sign and, as such, has a content side (semantics), and not just a syntactic structure, i.e. plan of expression. The present study examines the structural-semantic and predicative properties of the sentence and its functions: constructive and predicative. The theory of syntactic relations, based on the degree of connectedness of words in a sentence, is based on the opposition of the concepts of hypotaxis and parataxis.

In order to comprehensively and fully describe the structure of a sentence, it is necessary to consider its structural, semantic and predicative properties in the context of paradigmatic syntax. It is this consideration that gives us a complete picture of the nature of the syntax of the complicated and complex type.

### Аннотация

В настоящей статье авторами в рамках парадигматики выявляется явление синтаксиса, определяемая авторами как конструктсема (constructseme) в которой заключены структурно-семантические и предикативные свойства синтаксического построения, выраженные общими свойствами части синтаксической единицы составляющих цельное высказывание выходящей за границы традиционного предложения, отграниченного пунктуационными знаками и общей синтагмой, но имеющее общее смысловое целое и связанное с предыдущей конструкцией, выраженная полно-предикативной линией, конструктсема в свою очередь дополняет и уточняет базовую структуру.

Синтаксическая теория получила некоторые новые направления, которые в целом следует определить как семантический синтаксис. Вместе с развитием семиотики, науки о знаке, семантический синтаксис как наука способствовало появлению представления о том, что предложение – это целостный знак и как таковой имеет содержательную сторону (семантику), а не только синтаксическую структуру, т.е. план

выражения. В настоящем исследовании рассматриваются структурно-семантические и предикативные свойства предложения и его функций: конструкционные и предикативные. Теория синтаксических отношений, основанная на степени связанности слов в предложении основана на противопоставлении понятий гипотаксиса и паратаксиса.

Для того, чтобы всесторонне и полно описать строение предложения, необходимо рассмотреть его структурные, семантические и предикативные свойства в контексте парадигматического синтаксиса. Именно данное рассмотрение дает нам полное представление о природе синтаксиса осложненного и сложного типа.

**Keywords.** constructseme, tagseme, syntactic construction, full-predicative line, semi-predicative line, semantics, predicative property, communicative property.

**Ключевые слова:** конструктсема, тагсема, синтаксическая конструкция, полнопредикативная линия, полупредикативная линия, семантика, предикативные свойства, коммуникативные свойства.

### Введение

К средствам структурной и семантической связи, объединяющих группы синтаксических конструкций в осложненное или сложное синтаксическое целое, относится и неполнота последующих предложений за счет предшествующих. Данные неполные конструкции осложняют все высказывание, создавая осложненные предложения, которые представляют собой синтаксическую единицу выраженная одна полнопредикативной, а другая включенной, одной или несколькими полупредикативными линиями.

Одна из важнейших особенностей развития современного теоретического синтаксиса – неуклонное совершенствование методики и приемов синтаксического исследования. Можно с уверенностью сказать, что в этом направлении достигнуты определенные успехи. Однако делать окончательный вывод об эффективности разных новых методик до апробирования их на вполне конкретном и достаточном материале было бы преждевременным. В ряде исследований, посвященных синтаксису, все настойчивее выдвигается описание предложения через его парадигматику. Наиболее полно и последовательно она проводится в работах П.А. Адамец [1], М.Я. Блоха [2], Е.А., П. Робертс [3], Дж. Брингтон [4], У. Чейф [5], Н. Хомский [6].

Хотя синтаксическая парадигматика как самостоятельный аспект синтаксического изучения используется давно, однако попытка универсализировать парадигматическое описание в качестве приема стало лишь относительно недавно. Толкование парадигматического и трансформационного анализа как способа рассмотрения сложных и осложненных предложений проводилось в исследованиях [7; 8; 9; 10; 11]. Терминологическое выражение парадигматика предложения лишает его формально-синтаксического содержания и становится частью общеассоциативного плана рассмотрения единиц языка в его синтаксическом преломлении в значительной степени соприкасаясь с понятием синтаксическая синонимика. В настоящем исследовании рассматривается парадигматика предложения через призму его качественно-количественного показателя, которая характеризует ее сложность построения с учетом структуры, семантики и степени предикативности всего высказывания.

### Методика

В исследовании используются метод трансформационного анализа, а также в рамках синтаксической парадигматики применяется семантический, дистрибутивный и контекстный анализ.

### Обсуждение

В рамках анализируемого явления выявляется синтаксическая структура конструктсема (constructseme) (от слова construct – конструкт понятие о ненаблюдаемых объектах науки, постулируемых для объяснения фактов, данных в наблюдении [12]; seme – сема, значение), в которой заключены структурно-семантические и предикативные свойства синтаксического построения, выраженные общими свойствами части синтаксической единицы составляющих цельное высказывание выходящей за рамки традиционного предложения, отграниченного пунктуацией и общей синтагмой, но имеющее общее смысловое целое с предыдущей конструкцией, выраженная полно-предикативной линией, дополняющая и уточняющая базовую структуру. В рассмотрении любой синтаксической конструкции необходимо учитывать его предикативные свойства, так как без наличия предикативности нет самого предложения. Считаем, что для полного изучения синтаксического построения необходимо рассмотреть его структурные, семантические, предикативные и коммуникативные свойства объединенные в общее универсальное явление конструктсема.

Рассмотрим данное явление на следующем примере:

*"I don't know the game." say I. "That's for you and Mr. Bill to decide. He's your playmate for the day." I'm going away for a while, on business. Now, you come in and make friends with him and say you are sorry for hurting him, or home you go, at once.*" [13]

В примере из отрывка рассказа О. Генри "Вождь краснокожих" выделяется конструктсема *That's for you and Mr. Bill to decide*, выраженной обособленно, вынесенной за пределы полнопредикативного, базисного предложения *I don't know the game*. В приведенном примере, конструктсема выражает мысль дополняющая базисное предложение, в которой присутствует предикативная единица в имплицитном виде. Из приведенной конструктсемы при помощи деривации можно вывести скрытую предикацию *That's for you and Mr. Bill to decide → You should decide yourself and Mr. Bill*

*should do it.* В отличие от парцелированной конструкции, конструксема имеет свой предикативный центр, который выражен в имплицитной форме и более автосемантичен в плане функционирования на уровне текста, хотя семантически и структурно связана с базовым полнопредикативным предложением.

*"Hello, Slug! Slug's the early bird that caught the worm this time."*

*"Up all night watching for it, weren't you, Slug?"*

*"No more stopping up the chinks in your hut with paper, eh?"*

*You'll get a new house out of it.* [14]

В вышеприведенном примере конструксемой являются полупредикативные части *Up all night watching for it*, *No more stopping up the chinks in your hut with paper*, функционирующие в предложении как добавочная конструкция к полнопредикативной части, представленная в эллиминированной форме тагсемой *weren't you*. Тагсема – синтаксическая присоединительная зависимая единица речи, требующая подтверждение или отрицание основного повествовательного предложения, которая структурно и семантически отражается в свернутом, имплицитном виде полнопредикативную часть предложения и имеет в речи смешанный вопросительно-утвердительный характер. Для восполнения некоторых эллиминированных конструкций, есть необходимость рассмотреть их в контекстном окружении, так как только на уровне контекста есть возможность эксплицировать невыраженные конструкции.

*I've heard. Different crowds everywhere, too. All the old-timers will be dead. Sam Tyers of Murgha...* [14].

#### Заключение

Такие виды синтаксического построения возможно рассматривать в терминах куммулятивных конструкций, так как подобные структуры вынесенные за пределы предложения являются частью осложненного предложения, как бы вклиниваются в структуру окружающего предложения, приносят дополнительную предикативность, дополняя и расширяя его и находятся в зависимости от предыдущего или последующего предложения, в коммуникативном плане выступают рематической частью высказывания. Однако, в отличие от парцелированных конструкции имеют более независимую

природу. При парадигматическом анализе их возможно трансформировать в самостоятельную синтаксическую единицу.

#### Список использованных источников

1. Adamets, P.A., 1966. On the Issue of Syntactic Paradigmatics. -Československe rusistika, XI, 2 pp: 77.
2. Блох, М.Я. Теоретическая грамматика английского языка. (на англ.языке) – М.: «Высшая школа», 2004 – 423 с.
3. Roberts, P. English syntax. N-Y, 1964. Harcourt, Brace and world. – 434 p.
4. Brington, J. L., 2000. The Structure of Modern English. A Linguistic Introduction. John Benjamins Publishing Company. Philadelphia-Amsterdam. pp: 311.
5. Chafe ,W.L., 1976. Givness, contrastivness, definiteness, subjects, topics and points of view. // Subject and topic. N-Y., pp: 25 – 55.
6. Chomsky ,N. 1966. Topics in Theory of Generative Grammar. The Hague .
7. Daneš, Fr., 1963. Syntaksický model a syntaksický vzores. Československe přednošky pro Y Mezinárodní sjezd slavistů v Sofii.
8. Блох, М.Я. О различии так называемых глубинной и поверхностной структур предложения. // Теоретические проблемы синтаксиса современных индоевропейских языков. – Л., 1975. – С. 16 – 18.
9. Saurbayev, R.Zh. (2013) The Tagseme as a Component of Structural-Semantic Complexification of the Sentence //Middle East Journal of Scientific Research. 16 (3) IDOSI Publications. pp: 432-436.
10. Власова, Ю.Н., Загоруйко А.Я. Об основных структурах трансформационной грамматики. // Вопросы английской филологии и методики преподавания. – Ростов-на-Дону. – Вып. 1. 1972. – С. 3 – 22.
11. Гак, В.Г. Языковые преобразования. – М.: «Языки русской культуры», 1998.
12. Ахманова, О.С. Словарь лингвистических терминов. – М., 1966.
13. Henry, O. The Ransom of Red Chief and Other Stories. Published by Running Pr. Book Pub, Portland, ME, 1989.
14. Palmer, Vance. Heseltine Harry, Brisbane, University of Queensland Press, 1970 – 216 p.



# PHYSICAL SCIENCES

## DIGITAL TRANSFORMATION AND ARTIFICIAL INTELLIGENCE

**Aygün Sultanova Haji gizi**  
*Doctor of Philosophy in Physics,*  
*associate professor*  
*Nakhchivan State University*  
ORCID ID 0009-0006-7406-6055

## ЦИФРОВАЯ ТРАНСФОРМАЦИЯ И ИСКУССТВЕННЫЙ ИНТЕЛЛЕКТ

**Айгюн Султанова Гаджи кызы**  
*Доктор философии по физике,*  
*Доцент*  
*Нахчыванский государственный университет*  
ORCID ID 0009-0006-7406-6055

### Abstract

Artificial intelligence is a set of technologies that enable computers to perform a variety of advanced functions, including the ability to see, understand, and translate spoken and written language, analyze data, make recommendations, and more.

One of the distinguishing advantages of AI is its ability to automate repetitive tasks, thereby freeing up human resources for more strategic efforts. AI-powered tools can handle everything from data entry to complex data analysis and predictive maintenance. AI technology promises significant benefits for businesses, including customer improvement, data analysis, process automation, strategic recommendations, and improved decision-making.

Artificial intelligence is changing the world and people's lives, and is becoming the engine of economic and organizational growth. Whether it's a simple Google Search, a conversation with Amazon Alexa, Google Home, Apple's Siri, or a simple Chatbot on some website you visit, you may already be interacting with AI/ML-based tools and – well – bots – in many of your daily activities. This is undoubtedly changing the way we carry out our daily activities, organize our work, work, and make decisions in our daily lives [1].

As our society becomes more and more involved in data-driven technologies every day, it is important to master AI tools. Join our Master in Artificial Intelligence and Digital Strategy Management to learn about logistics and supply chains, data analysis and predictive market analysis, automation of commercial and financial processes, improving customer experience through personalized recommendations, developing cybersecurity solutions, developing cybersecurity solutions, developing user experience, improving cybersecurity solutions.

### Аннотация

Искусственный интеллект позволяет компьютерам видеть, понимать и переводить устную и письменную речь, анализировать данные, давать рекомендации и многое другое. Это совокупность технологий, позволяющих выполнять различные расширенные функции, включая возможности.

Одним из отличительных преимуществ ИИ является его способность автоматизировать повторяющиеся задачи, тем самым высвобождая человеческие ресурсы для более стратегических усилий. Инструменты на базе искусственного интеллекта могут обрабатывать все: от ввода данных до сложного анализа данных и прогнозного обслуживания. Технология искусственного интеллекта обещает значительные преимущества для бизнеса, включая улучшение качества обслуживания клиентов, анализ данных, автоматизацию процессов, стратегические рекомендации и улучшение процесса принятия решений.

Искусственный интеллект меняет мир и жизнь людей и становится двигателем развития экономик и организаций. Будь то простой поиск в Google, Amazon Alexa, Google Home, разговор с Siri от Apple или простой чат-бот на каком-либо веб-сайте, который вы посещаете, теперь вы можете взаимодействовать с инструментами на основе AI/ML и – ну, с ботами – во многих своих повседневных действиях. Это, безусловно, меняет то, как мы выполняем нашу повседневную деятельность, организуем нашу работу, работаем и принимаем решения в нашей повседневной жизни [1].

Поскольку наше общество с каждым днем все больше вовлекается в технологии, основанные на данных, важно освоить инструменты искусственного интеллекта. Присоединяйтесь к нашему мастеру в области искусственного интеллекта и цифровой стратегии. Управление логистикой и цепочками поставок, анализ данных и прогнозный анализ рынка, автоматизация коммерческих и финансовых процессов, улучшение качества обслуживания клиентов с помощью персонализированных рекомендаций, разработка решений по кибербезопасности, разработка решений по кибербезопасности, развитие пользовательского опыта, улучшение решений по кибербезопасности.

**Keywords:** intelligence, digital technology, strategy, infrastructure, concept.

**Ключевые слова:** разведка, цифровые технологии, стратегия, инфраструктура, концепция.

What is artificial intelligence (AI)? According to Accenture Research, “AI is a set of technologies that enable machines to detect, understand, act and learn on their own or from human activity.” They will have many of the same capabilities as humans – the ability to learn and distinguish things. But they also have a major advantage over humans – they do not need to rest to work. The same Accenture study shows that artificial intelligence could double annual economic growth rates by 2035 by changing the nature of work and creating new relationships between humans and machines, increasing labor productivity by up to 40%.

Artificial intelligence tools are becoming an integral part of many organizations in both the public and private sectors. It is being applied to help improve the performance of public authorities, their service levels and accountability, and to develop solutions aimed at the well-being of citizens [2].

Artificial intelligence is not new. To trace the origins of this concept, which sounds so innovative, we need to go back to 1956. In the summer of 1956, a group of scientists at Dartmouth University in New Hampshire met and coined the term “Artificial Intelligence (AI).” These researchers worked for two months with a clear goal: to find a way to incorporate the behaviors of human rational logic into machines. 62 years have passed, and there has been much research, some successes, and some failures, to make machines think like humans.

Interest in artificial intelligence began to revive in the late 1990s after IBM’s Deep Blue supercomputer defeated the great Russian chess master Garry Kasparov. Kasparov detailed this experience in his book “Deep Thinking: Where Machine Intelligence Ends and Human Creativity Begins”.

As industries and customer expectations evolve, businesses are facing increasing pressure to use emerging technologies such as artificial intelligence (AI) to innovate and keep up.

Digital Transformation is one of the most important initiatives that many organizations have undertaken or are undertaking. A perfect storm of a wide range of technologies such as SaaS, Mobile, Robotics, IoT (Internet of Things), Virtual Reality (VR), etc. are playing a crucial role in the Digital Transformation of companies. However, we believe that Artificial Intelligence (AI) and Machine Learning (ML) will be the key technologies that organizations will move forward through Digital Transformation. Digital transformation is no longer optional—it’s essential. According to a report by the International Data Corporation (IDC), 53 percent of organizations have enterprise-wide digital transformation strategies [3].

To thrive in today’s rapidly changing marketplace, it’s important to assess your organization’s approach to operations, decision-making, and customer engagement to adapt and capitalize on digital transformation opportunities. Digital transformation embraces new technologies to reshape how your business operates and creates value. It includes:

- Rethinking business models
- Optimizing operations
- Improving customer experiences

It’s not just about technology, but also about eliminating inefficiencies, increasing agility, and making data-driven decisions.

#### **Digital model transformation**

1. Strategy. As we embrace digital transformation, AI is playing a key role in reshaping business strategy. Unlike traditional strategies that rely on static data and human judgment, AI-based strategies are continuously evolving using cutting-edge technologies like machine learning and data analytics.

“When you have digital networks, AI, machine learning, all these cool things around you, your strategy options really expand,” says Harvard Business School professor Marco Iansiti, who teaches the online course AI Essentials for Business with HBS professor Karim Lakhani. “And you can do strategy in a variety of ways.” For example, AI is at the heart of Amazon’s business strategy and is driving its digital transformation. By analyzing real-time data, Amazon is predicting inventory shortages, rerouting deliveries, and improving shipping times. AI-based strategies don’t just improve existing practices; they fundamentally change them. With AI, you can use predictive analytics to predict customer needs, automate processes to reduce costs, and personalize services to increase customer satisfaction. [4].

Netflix provides another example of AI-driven transformation. By using AI and machine learning algorithms to analyze data including viewing habits, ratings, and search queries, the streaming service creates personalized recommendations for users, changing how they consume content. This allows Netflix to predict viewer preferences, optimize its content library, and make investment decisions based on data about shows and movies.

2. Governance. Strong data governance becomes even more important as you integrate AI into your business, as it provides the structures, policies, and processes to manage the risks posed by advanced technologies. Without governance, your company could face unintended consequences:

- Security vulnerabilities
- Ethical mistakes
- Operational inefficiencies

Governance is also critical to addressing ethical concerns about algorithmic bias—which occurs when AI systems are trained on biased or unrepresentative data, leading to unfair outcomes. For example, a hiring algorithm trained on historical data may reflect biased hiring practices, such as favoring male candidates over equally qualified female candidates [5].

In addition, governance facilitates accountability and oversight, ensuring that digital initiatives align with your business’s overall strategy. It helps establish clear lines of responsibility to effectively track and measure digital transformation efforts. By establishing stand-

ards, reviewing performance, and continuously improving processes, governance allows you to remain agile in a rapidly evolving digital landscape.

3. Architecture. A strong digital infrastructure is also essential. Your organization's systems, networks, and platforms must enable seamless integration of AI and other emerging technologies. Without a well-structured architecture, AI integration can falter—limiting data flow, collaboration, and scalability.

Creating an environment where AI technologies can thrive requires:

- Cloud-based platforms
- Scalable AI models
- Connected systems that support data sharing

For example, General Electric (GE) transformed industrial operations by deploying cloud-based platforms across its machines and sensors, creating a unified framework for real-time data analysis to predict equipment failures, optimize maintenance, and increase efficiency.

4. Culture. Digital transformation relies heavily on organizational culture beyond technology and infrastructure. Not every organization has a culture that supports digital transformation. Artificial intelligence can be essential to overcoming these barriers. By providing improved data sharing, workflows, and real-time insights, AI helps teams collaborate and make more agile and effective decisions. For example, Microsoft has transformed its organizational culture by embracing a growth mindset, emphasizing cross-functional collaboration, and using AI to provide data-driven insights to make faster, smarter decisions. This approach has allowed the company to fully embrace AI and cloud computing and position it as a leader in digital innovation. Such transformation is not possible without leadership-led change. A culture that supports AI adoption By integrating AI into your decision-making processes, you

can not only drive change, but also ensure that your team has the tools and insights to support and sustain cultural change.

### Conclusion

It is clear that Digital Transformation (DX) with the help of AI is the way forward. This creates an urgency to redefine the new AI-driven operating model, organizational structure, roles and communication strategy to effectively manage change.

Artificial Intelligence (AI) is here to stay and is leading an industrial revolution to make organizations more competitive and efficient. AI has already become a strategic factor in creating sustainable growth and providing organizations with a competitive advantage. The challenge for all of us is how to manage the required changes in organizational structure, management culture and investment in skills development so that the workforce is equipped to adapt to this global trend that we are already finding in our professional and personal lives.

### References

1. Kate Gibson Digital Transformation Harvard Business School September 25, 2024
2. Bhaskar S. Digital Technology and Artificial Intelligence August 28, 2024.
3. Kotler, P.; Keller, KL Marketing Management , 12th edition; Prentice Hall: Hoboken, NJ, USA, 2006; p. 143.
4. Boone, LE Contemporary Marketing ; Cengage Learning Canada Inc.: Toronto, ON, Canada, 2015.
5. Deiss, R.; Henneberry, R. Digital Marketing for Dummies ; John Wiley & Sons: Hoboken, NJ, USA, 2020.
6. Van Esch, P.; Stewart Black, J. Artificial Intelligence (AI): The Digital Marketing Revolution. Australia. Mark. J. 2021, 29, 199–203.

# PSYCHOLOGICAL SCIENCES

## METHODS FOR ELIMINATING SPEECH DISORDERS IN PRESCHOOL CHILDREN

Jafarova Lalazar

Master,

Sheki branch of Azerbaijan State Pedagogical University

## МЕТОДЫ УСТРАНЕНИЯ НАРУШЕНИЙ РЕЧИ У ДЕТЕЙ ДОШКОЛЬНОГО ВОЗРАСТА

Джафарова Лалазар

Магистр,

Азербайджанский Государственный Педагогический Университет,

Шекинский филиал

### Abstract

The teacher must know the main directions of the correction program, the age and individual characteristics of the formation of the speech of preschool children, understand the pronunciation features and lexical-grammatical aspects of speech, and take into account the speech capabilities of each child in the process of teaching and extracurricular activities.

### Аннотация

Педагог должен знать основные направления коррекционной программы, возрастные и индивидуальные особенности формирования речи детей дошкольного возраста, понимать особенности произношения и лексико-грамматические аспекты речи, учитывать речевые возможности каждого ребенка в процессе обучения и внеклассной работы.

**Keywords:** individual characteristics, correctional work, speech therapy, traditional methods, non-traditional methods, structure of speech therapy

**Ключевые слова:** индивидуальные особенности, коррекционная работа, сеанс логопедии, традиционные методы, нетрадиционные методы, Структура логопедического занятия

Педагог совместно с логопедом планирует занятия по развитию речи, ознакомлению с окружающим миром, подготовке к грамоте, подготовке руки к письму. Преемственность в работе логопеда и педагога включает не только совместное планирование, но и обмен информацией, обсуждение достижений детей как в речевой, так и в других видах деятельности. Все это записывается в специальную тетрадь. Таким образом, помимо общеобразовательных задач педагог логопедической группы выполняет и ряд коррекционных задач, суть которых заключается в устранении недостатков в сенсорной, аффективно-волевой и интеллектуальной сферах, возникающих в связи с особенностями речевого дефекта. В это время педагог уделяет особое внимание не только устранению имеющихся недостатков в развитии ребенка и обогащению его представлений об окружающем мире, но и дальнейшему развитию и совершенствованию функционирования всех анализаторов. Это создает основу для благоприятного развития.

В ходе коррекционной работы педагог уделяет большое внимание развитию мелкой моторики. Так, во внеурочное время можно предложить детям мозаику, пазлы, складывание фигурок из спичек или счетных палочек, потренироваться в развязывании и завязывании шнурков, сборе разбросанных пуговиц или мелких предметов, а также карандашей разных размеров. Для развития навыков письма детям можно предложить работу в тетрадях, что рекомендуется детям с нарушениями речи.

Особое место в работе воспитателя занимает организация подвижных игр для детей с нарушениями речи, поскольку дети, относящиеся к этой категории, часто бывают соматически слабыми, считаются физически слабыми, быстро утомляются. Планируя работу по организации игровой деятельности, педагог должен четко представлять себе реальные физические возможности каждого ребенка и дифференцированно подбирать подвижные игры. В подвижные игры, которые обычно являются частью уроков физкультуры и музыки, можно играть на выездах, на праздничных вечеринках или во время развлечений [1. стр 80].

Активные игры следует сочетать с другими видами деятельности детей. Активные игры также способствуют успешному развитию речи. Они часто состоят из стихов и четверостиший и могут предваряться считалкой для выбора водящего. Такие игры также способствуют развитию чувства ритма, гармонии и координации движений, оказывают положительное влияние на психологическое состояние детей.

При планировании индивидуального логопедического занятия важно учитывать некоторые наиболее важные аспекты работы.

*1. Рассмотрение механизмов нарушения речи.* В первую очередь необходимо определить причину появления логопатологии и устранить ее. Если причиной является укорочение подъязычной связки (уздечки), уздечку необходимо удлинить или подрезать.

Нарушения речи также могут быть причиной недостаточного внимания со стороны окружающих; В этом случае коррекционная работа направлена на нормализацию речи ребенка, развитие артикуляционных и фонематических процессов.

2. *Сложность.* Речь — сложный процесс. Коррекция речевых нарушений требует работы не только логопеда, но и других специалистов (детского психиатра, невролога, психолога), поскольку мозг — единое целое и нарушение звукопроизношения может быть одним из симптомов более сложного речевого нарушения.

3. *Воздействие на все аспекты речи (принцип системного подхода).* Часто родители обращают внимание на проблемы с речью у ребенка, не подозревая, что речь вообще не развивается.

Невозможно ограничиться только исправлением неправильного произношения; Обращают на себя внимание такие нарушения, как пропуски и смещения звуков и слогов в словах, бедность словарного запаса, неправильная координация слов в предложениях.

4. *Поддержка сохраненного элемента.* При устранении речевого нарушения специалист в первую очередь опирается на то, что осталось более сохранным, и лишь затем постепенно подключает поврежденную «связь» к активной деятельности.

Учет закономерностей развития нормальной речи. Усвоение языковых норм имеет свои алгоритмы, которые необходимо учитывать. Основная цель логопедии — максимально приблизить речевое развитие ребенка, страдающего речевым нарушением, к норме.

5. *Учет руководящей деятельности.* Таким занятием для дошкольника является игра. Во время игры у него возникает много вопросов, а значит, он испытывает потребность в вербальном общении. К игре присоединяется логопед и помогает ребенку преодолеть речевое нарушение так, чтобы он этого не осознавал.

6. *Шаг за шагом.* Процесс разговорной терапии длительный и целенаправленный. Выделяют следующие стадии:

- диагностика (осмотр, выявление нарушений речи, разработка индивидуальной программы коррекции)
- коррекция: мотивация ученика, подготовка артикуляционного аппарата, отработка правильного речевого дыхания, распознавание звуков, автоматизация звуков в самостоятельной речи, различение смешанных звуков.
- оценка и контроль динамики обучения, проверка отсутствия рецидивов

7. *Учет индивидуальных особенностей.* Каждый ребенок, особенно ребенок с какой-либо формой инвалидности, является индивидуальностью. Учитывая индивидуальные особенности, логопед находит подход к любому ребенку, выстраивает с ним доверительные отношения, заинтересовывает его, формирует уверенность в овладении нормальной речью. Индивидуальный подход к ребенку — залог успеха логопедической работы.

8. *Тесное сотрудничество с родителями.* Роль родителей является одной из ведущих в преодолении речевых проблем у ребенка. Ребенок занимается с логопедом один-два часа в неделю, и развитие речи — это непрерывный процесс. Только участие, интерес, изобретательность, энергия и постоянный контроль процесса со стороны родителей могут завершить работу, начатую логопедом. Совместное решение проблемы может сплотить родителей и детей, поскольку предполагает обучение через игру.[2. стр.67]

В работе логопеда традиционные технологии используются специалистом в следующих целях:

- комплексное рассмотрение и выявление нарушений;
- исправление ошибок произношения различных звуков;
- развитие навыков правильного речевого дыхания;
- коррекция голоса, темпа и ритма речи, ее интонации и расстановки пауз;
- проведение логопедического массажа. Рассмотрим каждый из них более подробно.

#### ■ Логопедическое обследование

Данная технология применяется на первом — диагностическом — этапе работы, и ее основной целью является выявление проблемы (дефекта), определение степени нарушения речи и выбор наиболее подходящих методов коррекции. Для достижения цели логопед решает следующие задачи:

- анализирует уровень развития речи ребенка и выявляет индивидуальные особенности;
- выявляет недостатки развития и изменения речи;
- делает прогнозы относительно применения специальных коррекционных методов и приемов;
- готовит план действий, разрабатывает индивидуальную программу работы с ребенком;
- анализирует результаты логопедических вмешательств.

#### ■ Коррекционная работа с ошибками произношения

Для исправления неправильного произношения звуков необходимо следующее:

- Подготовить анализаторы (речеслуховой и речезвуковой) к коррекции, правильному восприятию и правильному произношению звуков.
- Развивать начальные произносительные навыки и умения и доводить их до автоматизма.
- Обучать использованию определенных звуков в речи, развивать навыки установления коммуникативных связей.

#### ■ Формирование правильного речевого дыхания

Метод, который логопед выбирает для своей работы, зависит от конкретного нарушения речи, которое необходимо исправить.

Например, для развития речевого дыхания при заикании необходимо:

Развивать у ребенка навыки диафрагмально-реберного дыхания.

Научите его выдыхать воздух через рот в течение длительного времени.

Сделайте долгий фонаторный выдох.

Целью заключительного этапа станет формирование речевого вдохновения.

Для развития навыков речевого дыхания при дизартрии применяются общие дыхательные упражнения и упражнения на речевое дыхание.[3. Стр.120]

#### *Звуковая коррекция*

Такая коррекционная работа проводится, например, при ринолалии и включает упражнения и методики для:

- нормализация тембра голоса;
- восстановление функций гортани (особенно ее двигательной функции);
- разработка голосовых данных;
- восстановление навыков постановки голоса.

#### *Логотип массаж*

Суть данной логопедической технологии заключается в механическом воздействии на мышцы артикуляционного аппарата, что способствует восстановлению тонуса мышц, участвующих в речи. Логопедический массаж безболезнен, благотворно влияет на нервную систему и мышцы, стимулирует кровообращение, улучшает речевое дыхание, а главное, его можно проводить в домашних условиях, без присутствия специалиста.

#### *Инновационные технологии в логопедической практике*

В коррекционно-развивающей работе специалисты все чаще используют нетрадиционные методы и средства. Эти инновационные элементы в сочетании с традиционными, проверенными временем логопедическими технологиями помогают:

- Создать более комфортные условия для каждого ребенка, учитывая его индивидуальные особенности и потребности, в эмоциональном и психологическом плане.
- Вовлекать и мотивировать детей, делая их активными участниками образовательного и восстановительного процесса.
- Повысить эффективность взаимодействия логопеда с его маленькими подопечными.
- Ускорить достижение положительных результатов.

К инновационным технологиям, которые успешно применяются в работе логопедов, относятся:

методы арт-терапии: музыкотерапия, сторителлинг, песочная терапия, арт-терапия и т. д.;  
игровые технологии;  
телесно-ориентированные техники;  
цветотерапия;  
ароматерапия;  
пальчиковая гимнастика;  
информационные и компьютерные технологии (ИКТ);  
мнемоника;  
локальная гипер- и гипотермия или криотерапия и т. д.

#### *Музыкальная терапия*

Двигаться в ритме музыки, слушать музыкальные композиции, петь скороговорки под музыку

или играть на различных музыкальных инструментах — вариантов использования этого вида искусства множество. Музыкальная терапия оказывает такое благотворное воздействие на организм маленьких пациентов таким ненавязчивым, даже приятным образом:

- улучшает и стабилизирует эмоциональное состояние;
- тонизирует кору головного мозга;
- учит слушать и анализировать мелодии и звуки, создаваемые различными инструментами;
- развивает чувство ритма;
- стимулирует слух.

#### *Сказкотерапия*

Сказки могут быть дидактическими, психологическими, медитативными, психотерапевтическими и психокоррекционными. Они обладают огромным терапевтическим потенциалом. Истории можно сочинять и рассказывать, рисовать или сшивать. Элементы сказкотерапии помогают в коррекционной работе логопеда в дошкольном образовательном учреждении:

- создание комфортной атмосферы для ребенка;
- регулируют взаимодействие анализаторов - зрительного, слухового, двигательного;
- развивать у детей умение высказываться (строить монолог), вести беседу (вести диалог);
- работа над звуковой и лексико-грамматической стороной речи и т. д.

#### *Арт-терапия*

Существует множество разновидностей этого вида арт-терапии, например, кляксография, рисование зернистостью или рисование пальцами. Арт-терапия дает возможность невербального самовыражения и активизирует творческий потенциал, развивает мелкую моторику, способствует развитию артикуляционного аппарата и навыков связной речи.

#### *Песочная терапия*

Песок — природный материал с положительной энергетикой. Оказывает мягкое воздействие на нервные окончания, расположенные на кончиках пальцев, в сухожилиях, или, наоборот, снимает излишнее напряжение (мышечное, психоэмоциональное), способствует развитию мелкой моторики рук и навыков пространственной ориентации. Песочная терапия благотворно влияет на эмоционально-волевую сферу и позволяет мягко, непринужденно и в игровой форме корректировать дефекты речи, учит использовать как вербальные, так и невербальные средства общения, снимает психологические блоки.

Есть разные способы игры с песком:

- рисование отпечатков ладошек или кулаков;
- окуните руки в песок и пошевелите пальцами, сжимайте и разжимайте кулаки;
- проведите ладонями по песчаной поверхности;
- нарисуйте на поверхности зигзаги, круги или другие узоры;

- закапывать различные предметы (мелкие игрушки), затем медленно сдвигать песок и находить спрятанный предмет и т. д.

Однако стоит помнить, что песочный метод имеет противопоказания, такие как царапины или ссадины на руках, повышенная тревожность малыша или аллергия на пыль.

#### *Мнемотехника*

Это технология, которая помогает вам быстрее и легче запоминать информацию. Суть его в следующем:

Слова, фразы, фрагменты текста, сцены из мультфильмов или сказок изображаются схематично с помощью отдельных символов.

Дети видят эти загадочные символы и диаграммы и пытаются их расшифровать, что вызывает у них любопытство и интерес.

Перевод и расшифровка историй развивает творческие способности детей, что помогает им лучше запоминать.

Использование мнемотехники в логопедии помогает:

- активизировать зрительное и слуховое восприятие информации;
- развивать ассоциативное мышление и зрительную память;
- развивать навыки связной речи;
- развивать зрительное и слуховое внимание;
- улучшить произношение и т.д.

#### *Телесно-ориентированные техники*

Все в организме человека взаимосвязано. Тренируя двигательную сферу, можно стимулировать развитие психических функций и свойств, формировать умение управлять собственными движениями (движениями рук и ног), влиять на эмоционально-волевые проявления, характер, способности, речевые навыки.

Телесно-ориентированные методики, используемые в работе логопеда, включают:

- дыхательные упражнения - помогают развить навыки самоконтроля и улучшить ритм тела;
- биоэнергетическая пластика - один из видов артикуляционной гимнастики, которая предполагает одновременное выполнение определенных движений и активизацию речевого аппарата (например, поднятие рук и высовывание языка), учит координировать движения, развивает произвольное внимание, восприятие информации, синхронизирует мозговую деятельность, воздействует на головной мозг и мозговую деятельность. мысль и речь;
- упражнения на релаксацию - развитие навыков самонаблюдения;

Растяжка — система упражнений, направленных на попеременное напряжение и расслабление различных частей тела, эффективное средство против мышечной гипер- и гипотонии.

#### *Пальчиковая гимнастика*

Несмотря на свое несерьезное название, методика даёт хороший эффект: ритмичные движения пальцев помогают активизировать мозговые центры, отвечающие за речь. Выполняя простые

упражнения, дети учатся концентрироваться, правильно распределять внимание и тренируют память. Регулярные упражнения для пальцев также являются отличной подготовкой к овладению навыками письменной речи. И самое главное, эта методика доступна даже ползающим детям.

#### *Информационно-коммуникационные технологии (ИКТ)*

Компьютеры, планшеты и другие технические средства не только помогают логопедам готовиться к урокам — например, составлять презентации или раздаточные материалы, — но и разнообразят сам образовательный и обучающий процесс:

- показывать детям видеонструкции по выполнению некоторых упражнений;
- предоставление фрагментов готовых учебных программ классам;
- использование возможностей мультимедийных технологий - например, проведение увлекательного сеанса физической нагрузки или просмотр мультфильма и т. д.[4.стр 45]

Структура занятий по автоматизации произношения и дифференциации звуков включает обязательные элементы:

1. Организационный момент.
2. Объявление темы урока.
3. Характеристика звука на основе артикуляционных и акустических свойств.
4. Произношение изученных звуков в слогах и слогосочетаниях.
5. Произношение звуков в словах.
6. Физкультурная минутка.
7. Работа над произношением.
8. Произношение звуков в связной речи.
9. Подведение итогов урока.

Рассмотрим более подробно задачи и варианты организации структуры уроков по автоматизации произношения и дифференциации звуков.

#### *1. Организационные.*

Целью занятия является знакомство с темой урока, создание позитивного настроения, пробуждение интереса к изучению новых звуков, а также улучшение психомоторных функций. Основная задача учителя — заинтересовать детей с первых минут урока. Организационные моменты проводятся в разных вариантах, но в любом случае полезно включать упражнения на релаксацию, мимику и имитацию.

#### *2. Объявление темы урока.*

Задания, предложенные в этом разделе, позволяют плавно и незаметно перейти к теме урока. Перед детьми обычно выставляются игрушки, плоские фигурки или изображения персонажей, участвующих в занятии. Дети знакомятся с ними, называют выученные звуки и имена персонажей. Например, на уроке «Три поросенка» тема сообщения звучит так: «Сегодня мы напишем сказку про Ниф-Нифа, Наф-Нафа, Нуф-Нуфа и выучим звук Н». Другой вариант: детям предлагается повторить и отгадать загадку, в каждом слове которой присутствуют изученные звуки.

Таким образом, игровая форма, передающая тему урока, не только вызывает у детей интерес к

уроку, но и достигает главной цели данного этапа — сосредотачивает внимание детей на изучаемом звуке, восприятии новых звуков или повторении знакомых звуков.

3. Характеристика звуков на основе артикуляционных и акустических свойств.

На этом этапе выполняются следующие задачи:

- уточняется артикуляция - положение губ, языка и зубов при произнесении изучаемого звука;
- на рисунке показан «профильный» звук;
- определяются акустические характеристики звуков: согласные или гласные, твердые или мягкие, глухие или звонкие;
- обнаружено образное сравнение звука (звук [Р] – рев тигра);

4. Произношение изученных звуков в словах и слоговых сочетаниях.

Основная задача – развитие слухоречевой памяти и фонематического восприятия, мимики, просодических компонентов речи (ритма, ударения, интонации). Произношение слоговых последовательностей обычно сочетается с развитием интонационной выразительности речи и мимики. Слоговые сочетания произносятся в зависимости от характера урока.

5. Произношение звуков в словах.

На данном этапе урока решаются следующие задачи:

- развитие фонематического восприятия и фонематических представлений;
- уточнение и расширение словарного запаса;
- овладеть грамматическими категориями словоизменения и словообразования, понимать значение и многозначность слов;
- развитие слухового внимания и зрительной памяти;
- освоение простых и сложных видов звукослового анализа и синтеза.

Для решения этих проблем важен выбор речевых и визуальных материалов. Первый критерий отбора определяется темой и предметом занятия, второй — заданием. В работе постоянно используются предметы, игрушки, картинки, которые обогащают словарный запас детей и развивают фонематическое восприятие.

Визуальный материал не предъявляется в процессе формирования фонематических представлений, а если и предъявляется, то только после того, как дети называют слова. При этом фонематические представления детей, основанные на ранее известных образах предметов, позволяют активизировать мыслительные процессы у детей и развивать память.

Использование на уроке слов, охватывающих одну или несколько общих групп (птицы, животные, блюда и т. д.), способствует развитию логической памяти, а использование речевого материала — слов, насыщенных изучаемым звуком (в начале, середине или конце слова), — развивает звуковое чувство.

Параллельно с решением перечисленных задач на данном этапе ведется работа по овладению грамматическими категориями языка. Вопросы задаются таким образом, чтобы дети могли повторить одно и то же слово в разных падежах, единственном и множественном числе, в настоящем или прошедшем времени, а также с разными префиксами.

6. Физкультурная минутка

Физкультурная минутка тесно связана с темой урока и является своего рода мостиком к следующей части урока.

Основные цели физкультурной минутки:

- снять усталость и стресс;
- добавить эмоциональный фон;
- развивать общую моторику;
- развивать четкие координированные движения, связанные с речью.

Планируя физкультурную минутку, важно помнить, что физические упражнения в сочетании с подвижными играми и речью способствуют улучшению крупной моторики. Этой же цели служат и упражнения, имитирующие рабочие движения. Музыка и ритмичные движения снимают усталость и благотворно влияют на настроение детей.

Существуют различные формы проведения физкультурных минут. Это может быть имитация активной игры или трудовой деятельности, произношение скороговорок, сопровождаемое движением, и многое другое. Иногда развитие сюжета на физкультурной минутке связывается с цепочкой ситуаций из предыдущего этапа урока, одним словом. Физкультминутка может проводиться и в форме психофизической гимнастики, когда дети с помощью мимики, жестов и движений изображают состояния различных животных. Физкультурные минутки можно проводить под музыку, соответствующую теме урока.

7. Работа над предложением.

Первоначальная работа над заданиями на сочетание слов помогает детям успешно осваивать закономерности необходимых словосочетаний в предложениях.

Создание закономерностей усвоения необходимых связей между словами в соединениях является основой формирования лексико-грамматических конструкций предложений.

На этом этапе занятий решаются следующие задачи:

- установление лексических и грамматических связей между членами предложения;
- пополнение накопленного словарного запаса;
- формирование связности и ясности высказываний;
- работа над мыслительными процессами, особенно над предложениями как средством вывода заключений;
- анализ и синтез словесного состава предложения как средство профилактики нарушений письменной речи (дисграфии, дислексии).

Существуют различные методы работы над предложениями, но в любом случае важно помнить, что задания должны соответствовать основному



дидактическому правилу — от простого к сложному. На начальном этапе это ответы на вопросы по картинкам. Затем задания усложняются: детям предлагается составить предложения, используя ряд слов или ключевых слов.

Созданию живой и творческой атмосферы способствуют задачи, которые необходимо выполнить логопеду по исправлению намеренных «несоответствий» и смысловых ошибок в «сказках».

На этом этапе работы над предложением обязательным условием при выборе принципов и методов организации заданий должна быть логическая и игровая связь с сюжетом урока.

#### 8. Произношение звуков в связной речи.

Основная часть сценки — совершенствование навыков правильного произношения звуков в предыдущих текстах, то есть доведение произношения звуков до автоматизма. На этом пути решаются следующие задачи:

- развитие воображения и творческой фантазии;
- развитие словесного творчества;
- развитие мелодико-интонационного и просодического компонентов.

Необходимым и обязательным условием заданий на этом этапе является смысловая и игровая связь с темой или сюжетом урока и с заданиями предыдущего этапа.

Сначала они предлагают отдельные слова и рифмы, а затем целые фразы. Развитию связной речи способствует планомерное или импровизированное построение сюжета урока. В ходе занятия дети прогнозируют действия персонажей, готовят для них диалоги и реплики, отвечают на вопросы, находят выход из проблемных ситуаций.

Если позволяет время, можно организовать пересказ сказок детям от лица героев, с возможной театрализацией действий, развивающихся по мере развития сюжета (имитация движений, демонстрация сцен и т. д.).

#### 9. Подведение итогов урока.

На заключительном этапе подводятся итоги, т.е. определяется их эффективность. Начальным условием является передача положительных эмоций.

При проведении индивидуальной оценки необходимо отмечать активность, успехи, пусть даже небольшие, или просто хорошее настроение конкретного ребенка, а реакция на неудачи должна быть с надеждой на успех на следующих занятиях, с уверенностью в том, что не нужно отчаиваться — если активно работать, все получится!

Важно выяснить, как дети оценивают прошедший урок по ответам на вопросы: «Что вам понравилось? Какие задания показались вам интересными? Какое задание было самым трудным? Что бы вы хотели услышать в следующий раз?» и т. д.

Заключительный «аккорд» урока должен звучать как позитивная оценка и уверенность в том, что завтра будет еще лучше. Важно завершить занятие так, чтобы дети с нетерпением ждали следующей встречи с логопедом.

#### Список источников

1. Филичева Т.Б. Воспитание и обучение детей дошкольного возраста с общим нарушением речи. Программно – методические рекомендации / Т.Б. Филичева, Т.В. Туманова, Г.В. Чиркина. – 2-е изд., стереотип. – М.: Дрофа, 2010. – 189,(3) с. – (Дошкольник.Логопедия).
2. Шевченко И.Н. Конспекты занятий по развитию фонетико – фонематической стороны речи у дошкольников. – СПб.: ООО «ИЗДАТЕЛЬСТВО «ДЕТСТВО-ПРЕСС», 2011. – 128с.
3. Фомичева М.Ф. Воспитание у детей правильного произношения: Пособие для воспитателя дет.сада. – 3-е изд., перераб. и доп. – М.: Просвещение, 1980. – 240 с., ил.
4. Болотина Л.Р. Воспитание звуковой культуры речи у детей в ДОУ: метод.пособие / Л.Р. Болотина, Н.В. Микляева, Ю.Н. Родионова. – М.: Айрис-пресс, 2006, - 128 с. – (Дошкольное воспитание и развитие

## SOLUTION TO THE PROBLEM OF OPTIMIZATION OF A CATALYTIC REFORMING UNIT

Aygün Safarova Agamirza

Associate professor,

Azerbaijan State Oil and Industry University

Gunesh Dashdemirov

Master,

Azerbaijan State Oil and Industry University

**Abstract**

The refining, petroleum separation and petrochemical industries have high demands on the quantity and quality of the resulting products, which leads to increased process complexity both technologically and structurally. The complexity of control also affects the complexity of the process structure. In such a situation, it is considered appropriate to control the process under optimal conditions.

In the presented paper, an algorithm for solving an optimization problem based on a mathematical model of the reactor block of a catalytic reforming unit has been developed. This algorithm ensures the conduct of the technological process in the optimal operating mode and the optimal value of the control parameters.

**Keywords:** catalytic reforming unit, reactor block, regression equation, objective function

**Introduction**

Perfect study and mastering of technological processes continuously running in complex technological complexes is considered to be one of the important stages of creating optimal control systems. In modern conditions it is necessary to create new, more perfect control systems to improve the efficiency and effectiveness of production in the oil industry, as well as to change the quality indicators of products based on the necessary requirements.

When we talk about optimization of technological processes, it means the optimal conditions for the implementation of the process in question. Optimization is an activity aimed at obtaining optimal indicators taking into account the specified conditions of limitations. Before performing optimization, it is important to select an optimization criterion. Depending on the current states, economic (for example, minimum cost price of production), technological, etc. criteria can be used as optimization criteria. The objective function is the basis of the selected optimization criterion, which expresses the dependence between the optimization criterion and the parameters that affect its value. As a result, the extremum of the objective function is found and determined by means of the optimization problem [1,2].

At the same time, the presence of a number of specific characteristics of such technological systems makes it difficult to solve the issues of their management. Examples of such characteristics are a wide range of regime parameters, large measurement errors of individual parameters, and in some cases the lack of operational means of monitoring their measurement, uncontrolled change in parameters, changes in process characteristics and non-linearity, as well as other features.

In general, we assume that the objective function is given in the following form [3,4]:

$$F=f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

This function can be linear, a differential equation, nonlinear, or in other forms.

$x_j$  ( $j = \overline{1, n}$ )- the variables can be expressed in terms of constraints in the both form : equal as well as inequality :

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad i = \overline{1, m}$$

$$\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \geq 0 \quad i = \overline{1, k}$$

The main task of the platforming section of the catalytic reforming unit is to increase the octane number of gasoline obtained in the primary oil refining unit. If the octane number of the catalyst in this process is below the norm, some problems arise. This may be due to low temperatures at the inlet of the platforming reactors, increased pressure in the reactors, as well as a change in the quality of the feedstock (a decrease in the total amount of naphthenic hydrocarbons, a decrease in the boiling point). To eliminate these reasons, the pressure in the system should be reduced to 2-5 kg / cm<sup>2</sup> and the temperature of the gas product mixture should be lowered. It may happen that the octane number is below the norm or above. The reason for this is an increase in the volumetric velocity of the feedstock and mixing of the feedstock with the reaction products due to leaks in the tube bundles in the gas-feedstock heat exchangers. To solve this problem, it is necessary to repair the heat exchangers during the plant shutdown, reduce the feedstock feed and increase the temperature in the reactors.

**Solving of the problem**

Let's find the optimal values of the parameters affecting the reactor, which is the main apparatus of the hydrotreating block of catalytic reforming unit. The 1 solution for the optimization problem for the reactor unit of the catalytic reforming complex was found using the mathematical software package MathCAD. The optimization problem is solved by entering the coefficients of the mathematical model of the reactor and the constraint conditions based on the objective function [5,6].

Main regime parameters of the reactor block :

X<sub>1</sub>- DR -111 temperature of the gas product mixture entering the hydrotreating reactor °S

$X_2$  - DR -111 temperature at the bottom of the DR-111 hydrotreating reactor  $^{\circ}\text{S}$

$X_3$  - DR -111 pressure in the DR-111 hydrotreating reactor  $\text{kg}/\text{sm}^2$

$Y$  - DR -111 gas consumption in the DR-111 hydrotreating reactor/ saat

Constraint conditions for input and control parameters:

$$365^{\circ}\text{S} \leq X_1 \leq 374^{\circ}\text{S}$$

$$305^{\circ}\text{S} \leq X_2 \leq 310^{\circ}\text{S}$$

$$10,8 \text{ kg}/\text{sm}^2 \leq X_3 \leq 11,5 \text{ kg}/\text{sm}^2$$

$$136 \text{ t}/\text{h} \leq y \leq 138 \text{ t}/\text{h}$$

Regression equation in linear form:

$$Y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3$$

Consumption of gas obtained in the DR-111 hydrotreating reactor - $F$ , t/h

$$Y = f(X_1, X_2, X_3) \longrightarrow \max$$

$$Y = 220,7340 - 0,09398 X_1 - 0,30364 X_2 + 1,16309 X_3$$

$$b_0 := 220,734059$$

$$b_1 := -0,09398$$

$$b_2 := -0,303646$$

$$b_3 := 1,163097$$

$$f(x_1, x_2, x_3) := b_0 + b_1 \cdot x_1 + b_2 \cdot x_2 + b_3 \cdot x_3$$

$$x_1 := 365$$

$$x_2 := 305$$

$$x_3 := 10,8$$

Given

$$365 \leq x_1 \leq 374$$

$$305 \leq x_2 \leq 310$$

$$10,8 \leq x_3 \leq 11,5$$

$$p := \text{Maximize}(f, x_1, x_2, x_3)$$

$$p = \begin{pmatrix} 365 \\ 305 \\ 11,5 \end{pmatrix}$$

$$f(x_1, x_2, x_3) = 137,253$$

The optimal values of temperature of the gas product mixture entering the hydrotreating reactor  $365^{\circ}\text{S}$ , temperature at the bottom of the DR-111 hydrotreating reactor  $305^{\circ}\text{S}$ , pressure in the DR-111 hydrotreating reactor  $11,5 \text{ kg}/\text{sm}^2$ . Consequently the optimal value of gas flow rate in the hydrotreating reactor is  $F=137,25 \text{ t/h}$ .

### Conclusion

Mathematical formalization of the issue of optimal control of the reactor block of the catalytic cracking is performed. An optimization algorithm is developed that allows to calculate the optimal operating modes of the reactor block. Values obtained as a result of solving the optimization problem for reactor block.

### References

1. Robinson Paul. (January 2007). Petroleum Processing Overview. In book: Practical Advances in Petroleum Processing. DOI -10.1007/978-0-387-25789-1\_1.78pages. [https://www.researchgate.net/publication/226038766\\_Petroleum\\_Processing\\_Overview](https://www.researchgate.net/publication/226038766_Petroleum_Processing_Overview)
2. Safarova A.A. Solution of the Problem of Optimizing the Reactor Block of a Catalytic Cracking Unit. Herald of Azerbaijan Engineering Academy, V15(2), p.84–88. 2023  
DOI: [https://doi.org/10.52171/2076-0515\\_2023\\_15\\_02\\_84\\_88](https://doi.org/10.52171/2076-0515_2023_15_02_84_88)
3. Safarova A.A. The development of an algorithm for optimal distribution of water resources of regional irrigation systems. Herald of Azerbaijan Engineering Academy, V 9. N-2. 2017
4. Bukhtoyarov, V & Tynchenko, V & Petrovsky, E & Dokshanin, S & Kukartsev, V. (2019). Research of methods for design of regression models of oil and gas refinery technological units. IOP Conference Series: Materials Science and Engineering. 537 pages. DOI:10.1088/1757-899X/537/4/04207
5. D. Lee, and M. Wiswall. "A Parallel Implementation of the Simplex Function Minimization Routine", Computational Economics, vol. 30, pp. 171–187, 2007.
6. Mike J.D. Powell: The BOBYQA algorithm for bound constraint optimization without derivatives, Report DAMTP 2009/NA06, University of Cambridge, UK, 2009

## DEVELOPMENT OF MATHEMATICAL MODEL FOR GAS COMPRESSOR STATIONS

**Aygun Safarova Agamirza***Associate professor,**Azerbaijan State Oil and Industry University***Maleyka İslmayilova***Master,**Azerbaijan State Oil and Industry University***Abstract**

A gas compressor station is a station whose main task is to increase the pressure of natural gas. This is done both during its production and during transportation and storage. At the same time, it is necessary to constantly maintain a given value of the discharge pressure, taking into account the main parameters that affect the operation of the compressor of the unit.

Thus, it should be noted that the topic of creating control systems for compressor units is relevant today. As is known, one of the initial stages of an optimal control system is the construction of a mathematical model based on the identification problem of a technological object. In the presented article comprehensively examines the gas compressor, which is the main technological device of a gas compressor station, as a control object. A mathematical model is constructed for the operating parameters of the compressor for gas compressor station.

**Keywords:** gas compressor station, device, regression equation, mathematical model, adequacy

**Introduction**

A gas compressor station is a whole complex of various devices, structures and equipment that are used in the extraction, storage and transportation of natural gas to the consumer. It can be said that such a station becomes the main component of the main gas pipeline. It should be noted that such important characteristics of a compressor station as efficiency and reliability directly depend on the quality of the equipment, or more precisely on their fault tolerance [1].

One of the main equipment of a gas compressor station is a piston compressor, the task of which is to move natural gas and increase its pressure. In the cylinder, the volume of natural gas is changed by means of a special device called a differential piston. Such a piston makes a reciprocating motion directly in the cavity of the cylinder itself using a crank mechanism. The principle of operation of this mechanism is based on the transformation of the rotational motion of the engine shaft into the final reciprocating motion of the differential piston [2].

Power failure – may cause a complete shutdown of all available electric motors. In this case, the emergency diesel generator will be started automatically – in order to provide the station with electricity. This generator is not capable of providing the entire gas compressor station with electricity, but it is enough to start just one gas turbine, which will maintain the operating mode.

During operation of a gas compressor station, the air in the room may heat up due to heat emission from gas turbine engines and compressors. In addition to heat emission, the air in the room is polluted with harmful gases, various combustion products, and saturated with oil vapors. Such significant heat emission, as well as air pollution and saturation with harmful components, have a detrimental effect on the health of operators. In order to prevent significant heat emission, thermal insulation is used, which covers all surfaces of equipment that emit heat.

To build control system for a certain production, first of all it is necessary to conduct a comprehensive analysis of all controlled and regulated objects located in this production. In this case, it is necessary to build a mathematical model of the control object, by means of which all aspects of interest to us, all properties of the real object are studied.

Before building a model of a real object, it is necessary to collect data on the processes occurring at the control object. There are two methods of collecting data – active and passive. The active method involves applying a control signal to the input of the control object. This control signal is a binary signal, or a step or rectangular pulse. The advantages of this method of collecting data are the highest accuracy of the resulting mathematical description, as well as the relatively short duration of the experiment. The passive method does not involve applying any control test signals, and all data on the process are obtained during normal operation of the object. The accuracy of the mathematical description will not be very high. Due to the fact that an automatic control system is used at the object, the relationship between the input and output of the object will be carried out by means of a regulator, which also leads to a decrease in the accuracy of the resulting mathematical description. In order to improve accuracy, it is necessary to accumulate a large array of data on the process, which can be considered a disadvantage of this method.

**Solving of the problem**

When modeling a process object, a "black box" model is used, where all input and output parameters are determined and the relationship between them is established [3].

Construction of a mathematical model of a compressor is a whole complex of actions aimed at a comprehensive study of the compressor, or the phenomena and processes occurring inside it on the model by reproducing all these processes while preserving the relationships between them and their structure.

The main feature in mathematical modeling of a compressor is the continuous reproduction of all changes in its parameters, as well as changes in the dynamics of the movement of the distribution and working bodies by calculating on a computer a sequence of numbers that express these same compressor parameters.

Before building a mathematical model of the compressor it is necessary to determine its main parameters:  $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$ , where

$X_1$  - is the gas pressure at the compressor inlet  
 $X_2$  - is the gas temperature at the compressor inlet  
 $X_3$  - is the gas flow rate at the compressor inlet  
 $X_4$  - the motor speed  
 $X_5$  - is the required power

Having the specified parameters at the input, we will show a schematic model of a gas compressor unit (Fig. 1).



*Fig.1 Structural diagram of the compressor of the gas compressor unit*

The regression equation for the compressor will take like this [4,5] :

$$Y = b_0 + b_1X_1 + b_2X_2 + b_3X_3 + b_4X_4 + b_5X_5.$$

$$b_0 = -45,4701; b_1 = 2,163585; b_2 = 0,106796; b_3 = 0,0000668;$$

$$b_4 = 0,007829011; b_5 = -0,00055.$$

After writing the compressor parameter values in MS Excel (table 1) and performing the calculations, we obtain the following coefficient values:

In this case, our regression equation will take form:

$$Y = -45,4701 + 2,163585X_1 + 0,106796X_2 + 0,0000668X_3 + 0,007829011X_4 - 0,00055X_5.$$

Table 1

Primary statistic data

	A	B	C	D	E	F
1	x1	x2	x3	x4	x5	y
2	11,5	20	15378	7655	7702	37
3	11,6	22,5	16794	7624	8380	38,1
4	11,7	21	14457	7593	8067	37,5
5	11,8	24,6	17903	7562	9128	39,1
6	11,9	25,7	15347	7531	8793	36,3
7	12,1	29,7	17876	7500	7956	39,3
8	12,2	24,8	14682	7469	9378	38,8
9	12,3	23,5	16497	7438	9045	36
10	12,4	21,1	17103	7407	8278	40,1
11	12,5	21,3	14983	7376	9632	39,5
12	12,6	22,9	17308	7345	8853	37,1
13	12,7	28,6	17995	7314	9752	39,7
14	12,8	30	16234	7283	9474	36,9
15	12,9	29,8	15678	7252	8671	38,7
16	13,1	26,1	17245	7221	9704	36,5
17	13,2	28,4	14564	7190	8123	40
18	13,3	27,9	17569	7159	9567	39,9
19	13,4	22,3	16643	7128	8904	37,9
20	13,5	21,2	15603	7097	7890	39,2
21	13,6	27,4	14507	7066	9336	38,2
22	13,7	28,3	14783	7035	8457	39,8
23	13,8	20,6	17090	7004	9417	36,8
24	13,9	22,8	16356	6973	7913	39
25	14,1	26,5	15903	6942	8837	36,6

To check the obtained model according to Fisher's criterion, we will use the "data analysis" function of the MS Excel program (table 2).

Table 2

Checking the adequacy of the constructed model using Fisher's criterion

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	ВЫВОД ИТОГОВ								
2									
3	Дисперсионная статистика								
4	Множественный коэффициент корреляции R	0,9474221							
5	R-квадрат	0,8720702							
6	Нормированный коэффициент корреляции R	0,8586546							
7	Стандартная ошибка	1,3354664							
8	Наблюдения	27							
9									
10	Дисперсионный анализ								
11		df	SS	MS	F	значимость F			
12	Регрессия	5	5,141193	1,028239	15,85272	8,31E-06			
13	Остаток	21	37,45288	1,783471					
14	Итого	26	42,59407						
15									
16	Коэффициент корреляции R-значения и критические значения F								
17	Y-пересечение	-45,4701	247,1567	-0,29185	0,773266	-586,123	441,8581	-586,123	441,8581
18	Переменная 1	2,163585	6,42817	0,441806	0,663145	-10,5281	16,20812	-10,5281	16,20812
19	Переменная 2	0,106796	0,088291	0,981831	0,33736	-0,09692	0,270298	-0,09692	0,270298
20	Переменная 3	0,0000668	0,000233	0,204225	0,840144	-0,00044	0,000532	-0,00044	0,000532
21	Переменная 4	0,007829	0,022885	0,461675	0,649061	-0,03703	0,058157	-0,03703	0,058157

### Conclusion

In this paper, linear mathematical model is developed, which is mainly determined as a description of the operation of gas compressor device within the regulatory limits, mainly by studying the gas compressor apparatus of the gas compressor station as a control object and taking into account its specific characteristics, in order to build a mathematical model of this technological process. The adequacy of the obtained model is determined.

### References

1. Dinara Zhussupova, Mukhtarbay Otelbaev, Saule Burgumbayeva . Modeling Gas Compressor Station Operation to Minimize Fuel Costs for Surge Zone Protection. 15 March 2024 <https://doi.org/10.1155/2024/5560308>
2. Sina nabati shoghl, Gholamreza Pazuki Compressor/pump stations in natural gas transmission

pipelines . In book: Advances in Natural Gas: Formation, Processing, and Applications. Volume 6, Natural Gas Transportation and Storage. January 2024

DOI: 10.1016/B978-0-443-19225-8.00006-8

3. Statistical Models: Theory and Practice by David A. Freedman . University of California, Berkeley 2009.459 pages. <https://pdfroom.com/books/statistical-models-theory-and-practice/OX6231XL54Z>

4. A.A. Safarova. Development of the Mathematical Model of the Platforming Block of the Catalytic Reforming Unit. Herald of the Azerbaijan Engineering Academy 2022, vol. 14, no. 4, pp. 92-97. DOI: 10.52171/2076-0515\_2022\_14\_4\_92\_97

5. A.A. Safarova Development of Mathematical Model of the Main Apparatus of the Oil Fractionation Unit, June 2024, Herald of the Azerbaijan Engineering Academy, 16(2):97-102 DOI:10.52171/2076-0515\_2024\_16\_02\_97\_102

# TECHNICAL SCIENCES

## THE PROBLEM OF IDENTIFICATION OF A VACUUM DISTILLATION COLUMN

**Aygun Safarova Agamirza**

*Associate professor,*

*Azerbaijan State Oil and Industry University*

**Nigar İslamzade**

*Master,*

*Azerbaijan State Oil and Industry University*

### Abstract

Development of scientific bases of the automated control system allowing to increase economic efficiency of operation modes of vacuum block of oil refineries, which is one of the main technological processes of the fuel and energy complex, is an urgent problem of great national economic importance

In the presented paper the main technological parameters characterizing the vacuum column have been determined. A deterministic linear mathematical model capable of adequately reflecting the current technological state of the main apparatuses of the vacuum block of the technological complex of primary oil refining is developed. The adequacy of the obtained mathematical model has been checked and confirmed.

**Keywords:** oil refinery, K-4 column, regression equation, mathematical model, adequacy

### Introduction

Among oil refining equipment, a vacuum unit is considered to be a complex technological system combining technological devices that differ in critical operating modes, both from the point of view of automation and control. Researches have shown that the main functions of vacuum units in modern technological systems of oil refining, carrying out primary oil processing, are obtaining from fuel oil used as a raw material the maximum amount of light and heavy oil fractions, providing standard quality indicators, with the minimum energy consumption.

The conducted studies have shown that the main devices of the vacuum block of the technological complex are:

- tubular furnace providing heating of fuel oil;
- vacuum boiler for fuel oil rectification;
- additional evaporative coolers.

It should be noted that the main apparatus of this unit by the degree of influence on obtaining the target products as a control object is boiler K-4, carrying out rectification of fuel oil under vacuum conditions. The main technological parameters characterising this apparatus are temperatures and residual pressure in different points - above and below the calorimeter, in the plates from which light and heavy oil and gasoil are extracted.

As a result of studying this device as a control object, it was found that the most disturbance factors are changes in consumption and quality indicators of raw materials - fuel oil, which enter the atmospheric unit for processing.

Analysis of scientific literature shows that the state of any complex technological system is characterised by limited information necessary to describe its current state at a given time. For this reason, the primary oil refinery can be considered as a deterministic or incompletely deterministic system, depending on the amount of a priori information characterising its current technological state.

When studying the vacuum unit as a control object in the primary oil refining technological complex of the

oil production profile, it was concluded that one of the main difficulties arising in the development of a complete mathematical model taking into account its specific features is the lack of ability to quickly measure the quality indicators of the product fractions obtained as a result of the technological process (for example, specific gravity of oil fractions, ignition temperature, kinematic viscosity, etc.). The evaluation of these parameters by means of laboratory analysis is very time-consuming, which makes it difficult to develop adequate mathematical models. On the other hand, the fact that the quality indicators of the fuel oil coming from the atmospheric block and used as a raw material in the vacuum block are not measured at all does not allow the transient processes and excitation factors occurring in the system to be taken into account in the mathematical models.

Taking into account all the above, a linear mathematical model was developed to describe its operation within the regulation limits, by studying the K-4 column, which is the main apparatus of the vacuum block of the primary oil refining technological complex, as a control object, and taking into account its specific characteristics, to build a complete mathematical model of this technological apparatus.

### Solving of problem

Mathematical model is a symbolic representation reflecting functional mathematical dependencies of output and input parameters of objects.

The vacuum column K-4 is taken as the main apparatus for modelling in the vacuum block [1,2]. It is possible to build a mathematical symbolic model of this apparatus by means of passive experiments based on correlation and regression methods.

To build the model, first of all, statistical information is required. Collection of statistical information is possible by passive experimentation, since the investigated technological object has a risk of a number of accidents. Thus, if an active experiment is conducted at the object, the quality of the product obtained will change, the parameters will deviate from



the regime values and it will be impossible to stabilise them [3,4].

When developing mathematical models, analytical and experimental modeling methods are used. Using these methods, it is possible to develop mathematical models that allow studying all technological processes occurring in the system and the impacts on them. Experimental-statistical methods allow expressing mathematical dependencies between operating parameters that affect the course of technological processes in the form of both linear and nonlinear regression expressions. Using these dependencies, it is possible to determine the dependence of any two operating variables at any time, and it is also possible to study the processes occurring in all complex technological objects, regardless of their degree of complexity [5,6]. The specified methods are based on the processing of statistical information obtained as a result of passive experiments conducted at the object, using various software. In general, we can write linear regression models as follows:

$$Y = B_0 + \sum_{j=1}^k B_j X_j$$

here  $B_i$  – unknown regression coefficients.,  $X_i$  is input and  $Y_i$  is output.

The mathematical formulation of the modeling problem expressing the regression dependence between the vacuum section light oil product output (volume flow) and other parameters, and the sequence of solving the problem according to the formulation, are as follows [7].

Main technological parameters characterizing the vacuum column are follows:

- X1 — fuel oil consumption supplied to the K-4 column,
- X2 — fuel oil temperature in the column,
- X3 — level in the column,
- X4 — pressure at the top of the column,
- Y — light oil consumption

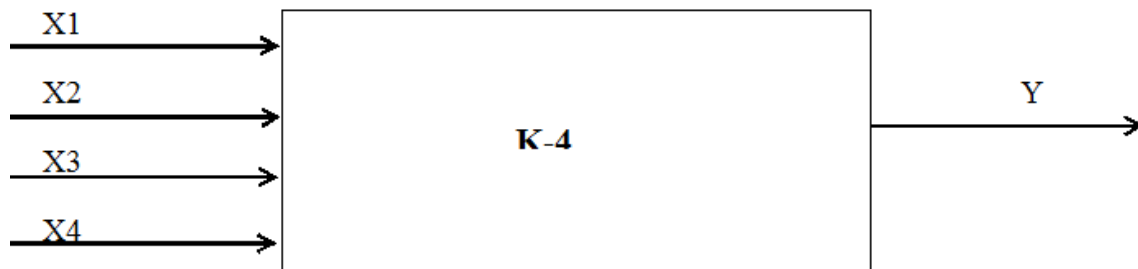


Figure 1. Control object

As a result of the experiments, the following statistical data were obtained. The obtained data are shown in Table 1.

Based on the statistical data we have obtained, the constraint condition will be as follows:

$$\begin{aligned} 40 &\leq X_1 \leq 44 \\ 171.1 &\leq X_2 \leq 185.7 \\ 29.1 &\leq X_3 \leq 30.96 \\ 58.3 &\leq X_4 \leq 61.97 \end{aligned}$$

$$24.11 \leq Y \leq 26.19$$

Mathlab program is used to build a mathematical model of the object.

$$y = B_0 + B_1 X_1 + B_2 X_2 + B_3 X_3 + B_4 X_4$$

We enter the data getting from experiments into the program.

The fuel oil consumption values:

X1=[40.15 41.23 41.56 40.39 42.69 42.4 42.63 42.5 43.6 43.56 43.65 43.89 41.23  
42.56 40.89 40.1 40 41.2 41.23 41.65 41.66 41.65 41.32 41.9];

We enter the values according to the temperature of the fuel oil:

X2=[172.77 174.5 175 177 183.2 185.1 172.7 172.3 172.6 173.1 172.9 183.5 185.2  
182.2 171.1 174.56 177.8 179.5 176.9 185.7 183.8 180.2 179.6 178.2];

Fuel oil level ;

X3=[29.5 29.6 29.8 29.1 29.1 29.7 29.6 29.3 29.3 29.2 30.1 30.2 30.5 30.5 30.7  
30.1 30 29.8 30.7 30.8 30.54 30.12 30.46 30.66];

Fuel oil pressure ;

Table 1

Statistic data					
N <sub>0</sub>	X <sub>1</sub>	X <sub>2</sub>	X <sub>3</sub>	X <sub>4</sub>	Y
1	40.15	172.77	29.5	58.3	25.19
2	41.23	174.5	29.6	58.9	24.87
3	41.56	175	29.8	58.6	24.2
4	40.39	177	29.1	58.96	24.2
5	42.69	183.2	29.1	58.32	24.87
6	42.4	185.1	29.7	59.32	24.2
7	42.63	172.7	29.6	59.62	25.2
8	42.5	172.3	29.3	60.34	24.2
9	43.6	172.6	29.3	60.4	24.2
10	43.56	173.1	29.2	60.44	24.87
11	43.65	172.9	30.1	60.55	24.87
12	43.89	183.5	30.2	61.2	25.18
13	41.23	185.2	30.5	62.61	24.2
14	42.56	182.2	30.5	61.87	24.2
15	40.89	171.1	30.7	61.3	24.2
16	40.1	174.56	30.1	61.15	24.2
17	40	177.8	30	59.65	24.2
18	41.2	179.5	29.8	60.25	24.2
19	41.23	176.9	30.7	60.36	24.2
20	41.65	185.7	30.8	61.97	24.45
21	41.66	183.8	30.54	58.67	24.45
22	41.65	180.02	30.12	59.45	24.2
23	41.32	179.6	30.46	59.46	24.17
24	41.9	178.2	30.66	59.2	24.19

X<sub>4</sub>=[58.3 58.9 58.6 58.96 58.32 59.32 59.62 60.34 60.4 60.44 60.55 61.2 62 61.87  
61.3 61.15 59.65 60.25 60.36 61.97 58.67 59.45 59.46 59.2];

Light oil consumption;

Y=[25.19 24.87 24.2 34.2 34.87 34.2 35.2 34.2 34.2 34.87 34.87 34.2 34.2 34.2  
34.2 34.2 34.2 34.2 34.2 34.45 34.45 34.2 34.17 34.19];

We include the number of experiments:

K=24

As a result of the calculations, the program calculates the coefficients of the equation:

$$B_0 = 61.4590$$

$$B_1 = 1.1740$$

$$B_2 = 0.2003$$

$$B_3 = -0.8598$$

$$B_4 = -1.1603$$

Substituting the coefficients into the regression equation, we obtain the following mathematical model:

$$Y = 61.4590 + 1.1740X_1 + 0.2003X_2 - 0.8598X_3 - 1.1603X_4$$

To ensure the adequacy of the mathematical model, it must meet certain criteria. This assessment is shown in Table 2.

Table 2

## Assessment of adequacy

Riyazi Modelin göstəriciləri		Analizdən alınan qiymətlər
1	Fisher criterion	3.9375
2	R squared	0.172415
3	Standard deviation	0.011492
4	Residual error	0.316329
5	Correlation coefficient	0.941523
6	Number of experiments	24

The results obtained confirm the adequacy of the mathematical model.

### Conclusion

In the paper has been studied the main device of vacuum block-K-4 as control object in oil refinery facilities and the main mode parameters affecting the course of the process have been determined. During the study, it was established that the vacuum column (K-4) as a control object can be studied as a system determined or not fully determined depending on the volume of a priori information characterizing its current technological state.

The mathematical models of the main output coordinates of the K-4 column is developed using the regression analysis method and their adequacy is checked.

### References

1. Robinson Paul. (January 2007). Petroleum Processing Overview. In book: Practical Advances in Petroleum Processing. DOI -10.1007/978-0-387-25789-7.78pages.[https://www.researchgate.net/publication/226038766\\_Petroleum\\_Processing\\_Overview](https://www.researchgate.net/publication/226038766_Petroleum_Processing_Overview)
2. Derco, Jan & Černochová, Lenka & Ivančinová, Jana & Lalai, Antonio & Pijáková, Ivana. (2012). Mathematical Modeling of an Oil Refinery WWTP. Polish Journal of Environmental Studies. 21. pp.845-853.  
[https://www.researchgate.net/publication/233752256\\_Mathematical\\_Modeling\\_of\\_an\\_Oil\\_Refinery\\_WWTP](https://www.researchgate.net/publication/233752256_Mathematical_Modeling_of_an_Oil_Refinery_WWTP)
3. Statistical Models: Theory and Practice by David A. Freedman .University of California, Berkeley 2009.459 pages. <https://pdfroom.com/books/statistical-models-theory-and-practice/OX623IXL54Z>
4. A.A. Safarova. Development of the Mathematical Model of the Platforming Block of the Catalytic Reforming Unit. Herald of the Azerbaijan Engineering Academy 2022, vol. 14, no. 4, pp. 92-97. DOI: 10.52171/2076-0515\_2022\_14\_4\_92\_97
5. Development of Mathematical Model of the Main Apparatus of the Oil Fractionation Unit, June 2024, Herald of the Azerbaijan Engineering Academy 16(2):97-102 DOI:10.52171/2076-0515\_2024\_16\_02\_97\_102
6. Golberg, Michael & Cho, Hokwon. (2010). Introduction to Regression Analysis. 2010/01/01.429 pages. Edition: Revised and Updated Edition Publisher: Wessex Institute of Technology, WIT press ISBN:978-1-85312-624-6  
[https://www.researchgate.net/publication/264700780\\_Introduction\\_to\\_Regression\\_Analysis](https://www.researchgate.net/publication/264700780_Introduction_to_Regression_Analysis)
7. Bukhtoyarov, V & Tynchenko, V & Petrovsky, E & Dokshanin, S & Kukartsev, V. (2019). Research of methods for design of regression models of oil and gas refinery technological units. IOP Conference Series: Materials Science and Engineerin. 537 pages. DOI:10.1088/1757-899X/537/4/04207  
[https://www.researchgate.net/publication/333836717\\_Research\\_of\\_methods\\_for\\_design\\_of\\_regression\\_models\\_of\\_oil\\_and\\_gas\\_refinery\\_technological\\_units](https://www.researchgate.net/publication/333836717_Research_of_methods_for_design_of_regression_models_of_oil_and_gas_refinery_technological_units)

№66 2025

**Annali d'Italia**

ISSN 3572-2436

The journal is registered and published in Italy.

Articles are accepted each month.

Frequency: 12 issues per year.

Format - A4 All articles are reviewed

Free access to the electronic version of journal

**Chief editor:** Cecilia Di Giovanni

**Managing editor:** Giorgio Bini

- Hoch Andreas MD, Ph.D, Professor Department of Operative Surgery and Clinical Anatomy (Munich, Germany)
- Nelson Barnard Ph.D (Historical Sciences), Professor (Malmö, Sweden)
- Roberto Lucia Ph.D (Biological Sciences), Department Molecular Biology and Biotechnology (Florence, Italy)
- Havlíčková Tereza Ph.D (Technical Science), Professor, Faculty of Mechatronics and Interdisciplinary Engineering Studies (Liberec, Czech Republic)
- Testa Vito Ph.D, Professor, Department of Physical and Mathematical management methods (Rome, Italy)
- Koshelev Andrey Candidate of Philological Sciences, Associate Professor, Faculty of Philology and Journalism (Kiev, Ukraine)
- Nikonov Petr Doctor of Law, Professor, Department of Criminal Law (Moscow, Russia)
- Bonnet Nathalie Ph.D (Pedagogical Sciences), Faculty of Education and Psychology (Lille, France)
- Rubio David Ph.D, Professor, Department of Philosophy and History (Barcelona, Spain)
- Dziedzic Stanisław Ph.D, Professor, Faculty of Social Sciences (Warsaw, Poland)
- Hauer Bertold Ph.D (Economics), Professor, Department of Economics (Salzburg, Austria)
- Szczepańska Janina Ph.D, Department of Chemistry (Wrocław, Poland)
- Fomichev Vladimir Candidate of Pharmaceutical Sciences, Department of Clinical Pharmacy and Clinical Pharmacology (Vinnytsia, Ukraine)
- Tkachenko Oleg Doctor of Psychology, Associate Professor (Kiev, Ukraine)

and other experts

Edition of journal does not carry responsibility for the materials published in a journal. Sending the article to the editorial the author confirms it's uniqueness and takes full responsibility for possible consequences for breaking copyright laws

500 copies

Annali d'Italia

50134, Via Carlo Pisacane, 10, Florence, Italy

email: [info@anditalia.com](mailto:info@anditalia.com)

site: <https://www.anditalia.com/>