УДК 530.1:621.3 DOI: 10.17223/00213411/64/8/9

К.Р. ДОСУМБЕКОВ, Н.А. ИСПУЛОВ, А.А. КУРМАНОВ, А.Ж. ЖУМАБЕКОВ

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН В ХОЛЕСТЕРИЧЕСКИХ ЖИДКИХ КРИСТАЛЛАХ *

Исследуются фундаментальные свойства решений уравнений Максвелла, описывающих распространение электромагнитных волн в холестерическом жидком кристалле, с тензорными характеристиками, зависящими от одной из пространственных координат (выбрана ось *Z*). Построена система дифференциальных уравнений первого порядка, получены матрица коэффициентов, структура матрицанта уравнений Максвелла, уравнения дисперсии анизотропной жидкой холестерической среды.

Ключевые слова: *анизотропная среда, уравнения Максвелла, электромагнитные волны, жидкие кристаллы, холестерики, уравнения дисперсии, периодическая структура, матрицант.*

Введение

Холестерические жидкие кристаллы (CLC) – это анизотропные и неоднородные материалы с интересными и полезными свойствами в видимой области электромагнитного спектра. Авторы работы [1] используют анализ собственных мод для получения выражений поддерживаемого поля в тонком однородном подслое ячейки CLC: жидкий кристалл состоит из нескольких подслоев. Ячейка зажата между слоями диэлектрика и возбуждается эллиптически поляризованной плоской волной при наклонном падении. Решение линейной системы уравнений дает коэффициенты отражения и пропускания в двух главных плоскостях, а также коэффициенты разложения для модальных полей внутри CLC и диэлектрических слоев. В работе [2] изучалось распространение плоских электромагнитных волн через слой жидкого кристалла, особое внимание уделялось проблеме оптимизации передаваемой интенсивности. Управляемая анизотропия жидкокристаллического слоя либо за счет условий закрепления на опорных стеклянных пластинах, расположенных между слоями, либо за счет наложения внешнего электромагнитного поля позволяет настраивать ориентацию слоя, чтобы максимизировать или минимизировать передаваемую интенсивность заданной длины волны через слой.

В публикации [3] исследуется нелинейная спиновая динамика гелимагнетика Гейзенберга под действием распространения электромагнитных волн. Основное динамическое уравнение спиновой эволюции, управляемое уравнением Ландау – Лифшица, напоминает директивную динамику твиста в холестерическом жидком кристалле. Обнаружено, что по мере распространения электромагнитной волны в среде как намагниченность, так и магнитное поле модулируются в виде солитонных мод путем введения флуктуации амплитуды в хвостовой части одного и того же поля. В [4] изложено квазиизотропное приближение (QIA) геометрической оптики, которое описывает свойства электромагнитных волн в слабоанизотропных средах, включая слабоанизотропные волокна, жидкие кристаллы и слабонамагниченную плазму. Уравнения QIA вытекают непосредственно из уравнений Максвелла и имеют форму связанных дифференциальных уравнений первого порядка для поперечных компонент электромагнитного поля. Применяемый к намагниченной плазме QIA описывает совместное действие явлений Фарадея и Коттона – Мутона и служит теоретической основой поляриметрии плазмы в FIR (дальнем инфракрасном) и микроволновом диапазонах. Авторы работ [5, 6] рассматривали функцию Грина и волноводное распространение электромагнитного поля в холестерических жидких кристаллах с шагом, большим по сравнению с длиной волны. Эта функция построена с использованием решения уравнений Максвелла. Ими также подробно проанализировано ее поведение в дальней зоне. Периодическая система отличается от анизотропной среды разрывом поверхности волнового вектора и изломом поверхности вектора пучка. В [7] теоретически рассматриваются явления отражения и прохождения плоских волн в пластинах из искусственных бианизотропных однородных сред. Рассмотрен случай изотропной основной среды, обладающей только диэлектрическими свойствами. Продемонстрирована возможность созда-

* Работа выполнена в рамках научно-исследовательского гранта AP08856290, финансируемого Комитетом науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

ния закрученной омега-структуры, микроволновые свойства которой аналогичны оптическим свойствам холестерических жидких кристаллов. Аналитическое решение представлено в [8, 9] для случаев распространения электромагнитных волн параллельно оси спирали в непрерывно закрученной двухосной диэлектрической среде, а также вдоль винтовой оси суперхолестерического материала. Две оптические оси этой однонаправленно неоднородной среды лежат в плоскости, перпендикулярной оси спирали, и разделены постоянным фазовым сдвигом. Используется матричный метод оптики 4×4. Получены точные решения задачи распространения осевых волн.

В [10] теоретически исследованы направленные электромагнитные волны (GEW) оптического диапазона частот в холестерических жидких кристаллах конечной толщины в условиях полного внутреннего отражения на обеих границах. Обсуждаются два вида интерфейса: CLC-металл, CLC-диэлектрик. Показано, что в таких пленках могут распространяться два типа волн: затухающие и незатухающие моды. В работе [11] в рамках теории динамической дифракции рассмотрены оптические поверхностно-наводимые электромагнитные волны (SGEW) второго порядка дифракции в холестериках. Получены и проанализированы дисперсионные уравнения. Найдены допустимая полоса частот SGEW и направления распространения (относительно ориентации директора на холестерической поверхности). Статья [12] посвящена исследованию структуры и поляризации поверхностных электромагнитных волн (ПЭВ), которые могут распространяться вдоль границы раздела между CLC и подложкой с малым показателем преломления. Показано, что эти ПЭВ эффективно генерируются методом ослабленного полного отражения.

На основе метода матриканта [13] рассматривались волновые процессы в упругих анизотропных средах, в анизотропных диэлектрических средах, волны в анизотропных пластинах, электромагнитные волны в средах с магнитоэлектрическим эффектом [14–17], волны в жидких кристаллах, распространение волн в термоупругих средах [18-20].

Результаты по единому описанию волновых процессов в средах с различными физико-механическими свойствами были доложены на XV Всероссийской школе-семинаре «Физика и применение микроволн» имени А.П. Сухорукова (Волны-2016) [21].

Цель, задачи и новизна исследования

Цель данной работы – изучение распространения электромагнитных волн в холестерических жидких кристаллах на основе аналитического метода матриканта. Для достижения цели были выполнены следующие задачи: на основе уравнений Максвелла, материальных соотношений для холестерических жидких кристаллов методом разделения переменных построена система дифференциальных уравнений первого порядка. Данная система описывает распространение электромагнитных волн в холестерических жидких кристаллах. Из указанной системы уравнений получена матрица коэффициентов, элементы которой являются основой для дальнейшего исследования. Далее в работе определена структура матриканта (нормированное решение системы дифференциальных уравнений) в общем случае.

Научная новизна работы заключается в применении жидких кристаллов в электронном приборостроении, которое использует особенности и закономерности распространения электромагнитных волн.

Отличительными преимуществами применения метода матриканта являются: введение понятия структуры матриканта и ее определения позволило применить для дискретных периодических структур классические методы, разработанные Бриллюэном и Пароди, к периодическим неоднородным средам; возможность понижения степени характеристического уравнения, характеризующего дисперсию волн, в 2 раза; возможность применения метода к распространению электромагнитных и упругих (механических) волн в различных по природе средах – упругих, термоупругих, пьезоупругих, пьезоэлектрических, электроупругих, пьезомагнитных, магнитоэлектрических, термопьезоэлектрических, жидких кристаллах и т.д.

Метод исследования

Метод исследования – метод матриканта, который позволяет получать точные аналитические решения дифференциальных уравнений, описывающих связанные процессы в средах с пьезоэлектрическими, пьезомагнитными и термопьезоэлектрическими свойствами, что позволяет решить поставленные в проекте задачи.

Основные уравнения и соотношения. Матрица коэффициентов

Фаза вещества, молекулы которой вытянуты по определенному направлению и находятся между жидким и твердым состояниями, называется жидкими кристаллами. Если при известном значении координаты z зафиксирована ориентация молекул, то при изменении z ориентация молекул изменяется по спирали. Такие вещества являются холестерическими жидкими кристаллами (или холестериками). Единичный вектор направления ориентации молекул называется директором. В холестерике направление директора задается следующим соотношением [22]:

$$\begin{aligned} n_x &= n_1 = \cos\left(q_0 z + \varphi\right), \\ n_y &= n_2 = \sin\left(q_0 z + \varphi\right), \\ n_z &= n_3 = 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Значение пространственного периода спирали директора составляет около $3{\cdot}10^3$ Å, что больше размеров атома. Тензор диэлектрической проницаемости зависит только от составляющих вектора [22]:

$$\varepsilon_{ij} = \left(\delta_{ij} - n_i n_j\right)\varepsilon_\perp + n_i n_j \varepsilon_{\text{II}}, \tag{2}$$

где ε_{II} и $\varepsilon_\perp$ – составляющие относительной диэлектрической проницаемости вдоль оси Z и перпендикулярно.

Запишем составляющие тензора диэлектрической проницаемости с помощью соотношения (2):

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = \left(1 - n_1^2\right)\varepsilon_\perp + n_1^2\varepsilon_{\text{II}} = \varepsilon_\perp + \left(\varepsilon_{\text{II}} - \varepsilon_\perp\right)n_1^2, \quad \varepsilon_{12} = -n_1 n_2 \varepsilon_\perp + n_1 n_2 \varepsilon_{\text{II}} = \left(\varepsilon_{\text{II}} - \varepsilon_\perp\right)n_1 n_2, \\ \varepsilon_{13} = 0, \quad \varepsilon_{21} = \varepsilon_{12}, \quad \varepsilon_{22} = \left(1 - n_2^2\right)\varepsilon_\perp + n_2^2\varepsilon_{\text{II}} = \varepsilon_\perp + \left(\varepsilon_{\text{II}} - \varepsilon_\perp\right)n_2^2, \\ \varepsilon_{23} = 0, \quad \varepsilon_{31} = 0, \quad \varepsilon_{32} = 0, \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_\perp. \end{gathered} \tag{3}$$

Структура тензора диэлектрической проницаемости имеет следующий вид:

$$\hat{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & 0 \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_{33} \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Учитывая соотношение (1), из (3) получим

$$\begin{gathered} \varepsilon_{11} = \varepsilon_\perp + \left(\varepsilon_{\text{II}} - \varepsilon_\perp\right)\cos^2\left(q_0 + \varphi\right), \\ \varepsilon_{12} = \left(\varepsilon_{\text{II}} - \varepsilon_\perp\right)\cos\left(q_0 + \varphi\right)\sin\left(q_0 + \varphi\right), \\ \varepsilon_{22} = \varepsilon_\perp + \left(\varepsilon_{\text{II}} - \varepsilon_\perp\right)\sin^2\left(q_0 + \varphi\right), \\ \varepsilon_{33} = \varepsilon_\perp . \end{gathered}$$

Вид тензора диэлектрической проницаемости соответствует тензору диэлектрической проницаемости анизотропной диэлектрической среды моноклинной системы. При этом ось симметрии второго порядка параллельна оси Z.

Пусть известны значения тензоров диэлектрической и магнитной проницаемости. При этом свойства среды заданы, даже если один из них будет скалярной величиной. Исходя из этого, для диэлектрической анизотропной среды материальные уравнения запишем в виде

$$D_i = \varepsilon_0 \varepsilon_{ij} E_j, \quad \varepsilon_{ij} = \left(\omega, \boldsymbol{r}\right), \quad B_i = \mu_0 \mu_{ij} H_j, \quad \mu_{ij} = \left(\omega, \boldsymbol{r}\right). \tag{5}$$

Будем считать, что эти тензоры зависят только от одной пространственной координаты Z, т.е. среда неоднородна относительно оси Z.

Если объемная плотность зарядов ρ и плотность тока j равны нулю, то система уравнений Максвелла примет вид

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{E} = -\frac{\partial \boldsymbol{B}}{\partial t}; \tag{6}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{B} = 0; \tag{7}$$

$$\operatorname{rot}\boldsymbol{H}=\frac{\partial\boldsymbol{D}}{\partial t}; \tag{8}$$

$$\operatorname{div}\boldsymbol{D}=0, \tag{9}$$

где $\boldsymbol{E}$ – напряженность электрического поля; $\boldsymbol{B}$ – вектор индукции магнитного поля; $\boldsymbol{H}$ – напряженность магнитного поля; $\boldsymbol{D}$ – вектор индукции электрического поля.

Учитывая вышесказанное, волновые поля $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{D}$ представим в гармоническом виде

$$\boldsymbol{F}=\boldsymbol{F}(\omega,z)e^{i\omega t\pm ik_x x\pm ik_y y}, \tag{10}$$

где ω – частота; k_x и k_y – компоненты волнового вектора вдоль осей X и Y соответственно. Свойства среды от координат x и y не зависят.

Систему уравнений первого порядка, описывающую распространение электромагнитных волн в холестерическом кристалле, запишем так:

$$\begin{aligned}
\frac{dE_y}{dZ}&=i\left(\omega\mu_0\mu-\frac{k_y^2}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z}\right)H_x+i\frac{k_xk_y}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z}H_y,\\
\frac{dH_x}{dZ}&=i\left(\omega\varepsilon_0\varepsilon_y-\frac{k_x^2}{\omega\mu_0\mu}\right)E_y+i\left(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yx}+\frac{k_xk_y}{\omega\mu_0\mu}\right)E_x,\\
\frac{dH_y}{dZ}&=-i\left(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{xy}+\frac{k_xk_y}{\omega\mu_0\mu}\right)E_y-i\left(\omega\varepsilon_0\varepsilon_x-\frac{k_x^2}{\omega\mu_0\mu}\right)E_x,\\
\frac{dE_x}{dZ}&=-i\frac{k_xk_y}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z}H_x-i\left(\omega\mu_0\mu-\frac{k_x^2}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z}\right)H_y.
\end{aligned} \tag{11}$$

Или в матричном виде

$$\frac{d}{dZ}\begin{pmatrix}E_y\\H_x\\H_y\\E_x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&b_{12}&b_{13}&0\\b_{21}&0&0&b_{24}\\-b_{24}&0&0&b_{34}\\0&-b_{13}&b_{43}&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}E_y\\H_x\\H_y\\E_x\end{pmatrix}. \tag{12}$$

Запишем уравнение (12) как

$$\frac{d\boldsymbol{u}_x}{dz}=\hat{B}\boldsymbol{u},$$

$$\boldsymbol{u}=\left(E_y,H_x,H_y,E_x\right)^t, \tag{13}$$

где матрица $\hat{B}$ имеет структуру

$$\hat{B}=\begin{pmatrix}0&b_{12}&b_{13}&0\\b_{21}&0&0&b_{24}\\-b_{24}&0&0&b_{34}\\0&-b_{13}&b_{43}&0\end{pmatrix}, \tag{14}$$

в которой коэффициенты матрицы (14) имеют вид

$$b_{12}=i\left(\omega\mu_0\mu-\frac{k_y^2}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z}\right),\quad b_{13}=i\frac{k_xk_y}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z},\quad b_{21}=i\left(\omega\varepsilon_0\varepsilon_y-\frac{k_x^2}{\omega\mu_0\mu}\right),$$

$$b_{24}=i\left(\omega\varepsilon_0\varepsilon_{yx}+\frac{k_xk_y}{\omega\mu_0\mu}\right),\quad b_{31}=-b_{24},\quad b_{34}=-i\left(\omega\varepsilon_0\varepsilon_x-\frac{k_x^2}{\omega\mu_0\mu}\right),$$

$$b_{42}=-b_{13},\quad b_{43}=-i\left(\omega\mu_0\mu-\frac{k_x^2}{\omega\varepsilon_0\varepsilon_z}\right).$$

Коэффициенты (14) являются основой для исследования системы четырех дифференциальных уравнений первого порядка. Эти уравнения описывают электромагнитные процессы в неоднородных материальных средах, в которых проявляются анизотропные свойства при распространении в них гармонически зависящих от времени электромагнитных волн.

Структура матриканта

Нормированное решение уравнения (13) называется матрицантом [23]. Методами последовательных приближений и математической индукции решения уравнений Максвелла структурируем, сопоставляя слагаемые получаемых рядов для прямого и обратного матриканта [23]:

$$T = E + \int_0^z B(z_1)dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_1)B(z_2)dz_1 dz_2 + \ldots,$$

$$T^{-1} = E - \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_2)B(z_1)dz_1 dz_2 - \ldots$$

Структура фундаментальных решений уравнений распространения электромагнитных волн в холестерических жидких кристаллах определяется по структуре матрицы коэффициентов (14).

Сравнивая четные и нечетные слагаемые этих рядов, в итоге получаем структуры матрицантов в виде

$$T = \begin{pmatrix} t_{11} & it_{12} & it_{13} & t_{14} \\ it_{21} & t_{22} & t_{23} & it_{24} \\ it_{31} & t_{32} & t_{33} & it_{34} \\ t_{41} & it_{42} & it_{43} & t_{44} \end{pmatrix},$$

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -it_{12} & it_{42} & -t_{32} \\ -it_{21} & t_{11} & -t_{41} & it_{31} \\ it_{42} & -t_{14} & t_{44} & -it_{34} \\ -t_{23} & -it_{13} & -it_{43} & t_{33} \end{pmatrix}.$$

Тождество $TT^{-1} = T^{-1}T = E$ определяет все инвариантные отношения, отражающие законы сохранения электромагнитных волн при их распространении в неоднородных кристаллах:

$$t_{11}t_{22} + t_{12}t_{21} - t_{13}t_{24} - t_{14}t_{23} = 1,$$

$$it_{11}t_{42} - it_{12}t_{41} + it_{13}t_{44} - it_{14}t_{43} = 0,$$

$$t_{33}t_{44} + t_{34}t_{43} - t_{31}t_{42} - t_{32}t_{41} = 1,$$

$$-it_{41}t_{12} + it_{41}t_{11} - it_{43}t_{14} - it_{44}t_{13} = 0,$$

где t_{ij} – элементы прямой матрицы *T*.

Уравнения дисперсии усредненной среды

Распределение длинных электромагнитных волн в холестерических жидких кристаллах $\lambda >> h$ ($h = 2\pi / q_0$), λ – длина волны, h – шаг спирали или период неоднородности холестерического жидкого кристалла, тогда матрицант уравнений Максвелла можно записать в виде [13]

$$T^{\pm} = \left[\frac{\hat{p} - \tilde{p}_2 E}{\tilde{p}_1 - \tilde{p}_2}\right]_{(2)} \left[E\cos\tilde{k}H \pm \frac{\langle B\rangle}{\tilde{k}}\sin\tilde{k}H\right] + \left[\frac{\hat{p} - \tilde{p}_1 E}{\tilde{p}_2 - \tilde{p}_1}\right]_{(2)} \left[E\cos\tilde{\chi}H \pm \frac{\langle B\rangle}{\tilde{\chi}}\sin\tilde{\chi}H\right]. \qquad (15)$$

В это соотношение введена матрица коэффициентов

$$\langle B\rangle = \frac{1}{h}\int_0^h B(Z)dZ, \qquad (16)$$

$B(Z)$ имеет вид (14); матрица $\hat{p}$ во втором приближении определяется по формуле

$$\hat{p}_{(2)} = E + \frac{1}{2}\langle B\rangle^2 h^2 ; \tag{17}$$

$\tilde{p}_{1,2}$ и $\tilde{k}, \tilde{\chi}$ являются корнями характеристического уравнения. Это определяется условием

$$\det\left[\hat{p}_{(2)} - kE\right] = 0 , \tag{18}$$

$$k_{1,2}^2 = \frac{1}{2}\left(b_{12}b_{21} - 2b_{13}b_{24} + b_{34}b_{43}\right) \pm \sqrt{\begin{array}{l}\left(\frac{1}{2}b_{12}b_{21} - \frac{1}{2}b_{43}b_{34}\right)^2 - b_{12}b_{24}b_{13}b_{21} - b_{12}b_{24}^2b_{43} - b_{13}^2b_{21}b_{34} \\ -b_{13}b_{34}b_{24}b_{43}\end{array}} .$$

Матрицант уравнений Максвелла, описывающий распространение электромагнитных волн в холестерическом кристалле в длинноволновом приближении ($\lambda >> 2\pi / q_0$), принимает вид

$$T^{\pm} = \left[\hat{\pi} + \frac{1}{2}E\right]\left[\cos\tilde{k}Z \pm \frac{\langle B\rangle}{\tilde{k}}\sin\tilde{k}Z\right] - \left[\hat{\pi} - \frac{1}{2}E\right]\left[\cos\tilde{\chi}Z \pm \frac{\langle B\rangle}{\tilde{\chi}}\sin\tilde{\chi}Z\right], \tag{19}$$

матрица $\hat{\pi}$ имеет структуру

$$\hat{\pi} = \begin{bmatrix} \pi_1 & 0 & 0 & \pi_{14} \\ 0 & \pi_1 & \pi_{23} & 0 \\ 0 & \pi_{14} & -\pi_1 & 0 \\ \pi_{23} & 0 & 0 & -\pi_1 \end{bmatrix},$$

$$\pi_{ij} = \left(\frac{p_{ij}}{2\Delta}\right).$$

Выше была получена структура матрицанта уравнений Максвелла, определены корни дисперсии из уравнения (18). Теперь проведем анализ корней уравнения дисперсии.

Учитывая, что параметры кристалла находятся в периодической зависимости z от пространственных координат ($\varphi(z) = \varphi(z+h)$, $\psi(z) = \psi(z+h)$), можно определить общий тип дисперсии электромагнитной волны из структуры матрицы фундаментальных решений. Исходя из положений, полученных в [13], можно записать условие вывода уравнения дисперсии (18)

$$\hat{p} = \frac{1}{2}\left[T + T^{-1}\right], \tag{20}$$

где

$$\hat{p} = \begin{pmatrix} p_1 & 0 & p_{13} & p_{14} \\ 0 & p_1 & p_{23} & p_{24} \\ p_{24} & -p_{14} & p_2 & 0 \\ -p_{23} & p_{13} & 0 & p_2 \end{pmatrix}.$$

Корни характеристического уравнения (18) образуют следующие формулы дисперсии:

$$\cos k_1 z = \lambda_1,$$
$$\cos k_2 z = \lambda_2,$$

где λ_1, λ_2 – корни уравнения (18),

$$\begin{aligned} \lambda_{1,2} &= \frac{p_1 + p_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1 + p_2\right)^2 - 4\left(p_{14}p_{23} - p_{13}p_{24}\right)}, \\ \lambda_{1,2} &= \frac{p_1 + p_2}{2} \pm \frac{1}{2}\sqrt{\left(p_1 - p_2\right)^2 - 4\left(p_{14}p_{23} - p_{13}p_{24}\right)}. \end{aligned} \tag{21}$$

Таким образом, из структуры матрицанта уравнений Максвелла (6) – (9) и характеристического уравнения (18) получены уравнения дисперсии (21) в аналитическом виде.

Заключение

В работе исследовано распространение электромагнитных волн в жидких холестерических кристаллах методом матрицанта. На основе уравнений Максвелла и материальных соотношений получена система дифференциальных уравнений первого порядка, описывающая распространение гармонических электромагнитных волн в анизотропных жидких кристаллах. Определены матрица коэффициентов и структура матрицанта в общем случае.

В результате исследования с учетом периодических изменений компонентов тензора диэлектрической проницаемости получены уравнения дисперсии электромагнитных волн, распространяющихся в холестерических жидких кристаллах. Корни данных уравнений определяют скорости распространения и коэффициенты затухания электромагнитных волн в холестерических жидких кристаллах. Определен также аналитический вид матрицанта с использованием полиномов Чебышева – Гегенбауэра.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ:

1. Christou M.A., Polycarpou A.C., and Papanicolao N.C. // IEEE Int. Symp. on Antennas and Propagation. Jul 08–14, 2012. – Chicago: IL, 2012.
2. Choate Eric P. and Zhou Hong // Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series S. – Apr. 2015. – V. 8. – Iss. 2. – P. 303–312.
3. Saravanan M. // Phys. Lett. A. – Aug 2014. – V. 378. – Iss. 41. – P. 3021–3027.
4. Kravtsov Yury A. and Bieg Bohdan // Opt. Appl. – 2010. – V. 40. – Iss. 4. – P. 975–989.
5. Aksenova E.V., Romanov V.P., and Val'kov A.Y. // Mol. Cryst. Liq. Cryst. – 2001. – V. 359. – P. 671–684.
6. Aksenova E.V., Romanov V.P., and Val'kov A.Y. // IEEE ED, MTT, AP Chapter. International Seminar Day on Diffraction. – St. Petersburg, 1999. – P. 7–15.
7. Khakhomov S.A. and Semchenko I.V. // Adv. Electromagn. Complex Media and Metamater. NATO Sci. Ser. II. – Math. Phys. and Chem. – 2002. – V. 89. – P. 197–210.
8. Weiglhofer W.S. and Lakhtakia A. // Optik. – 1994. – V. 96. – Iss. 4. – P. 179–183.
9. Weiglhofer W.S. and Lakhtakia A. // J. Phys. D. Appl. Phys. – Dec. 1993. – V. 26. – Iss. 12. – P. 2117– 2122.
10. Plis A.I. and Shilina G.I. // Mol. Cryst. Liq. Cryst. – 1992. – V. 223. – P. 19–28.
11. Belyakov V.A. and Shilina G.I. // Mol. Crys. Liq. Cryst. – 1992. – V. 223. – P. 55–67.
12. Shiyanovskii S.V. // Mol. Cryst. Liq. Cryst. – 1990. – V. 179. – P. 133–138.
13. Тлеукенов С.К. Метод матрицанта. – Павлодар: ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. – 172 с.
14. Тлеукенов С.К., Бобеев А.Б., Сабитова Д.С. // Труды школы-семинара «Волны-2016». Физика и применение микроволн. Электродинамика. – 2016. – Т. 6. – С. 75–76.
15. Тлеукенов С.К., Жукенов М.К. // Материалы III Междунар. науч.-практич. конф. «Математическое моделирование механических систем и физических проессов». – Алматы, 2016. – С. 174–175.
16. Kurmanov A.A., Ispulov N.A., Abdul Qadir, et al. // Phys. Scripta. – 2021. – V. 96. – No. Art. 085505. DOI: 10.1088/1402-4896/abfe87.
17. Tleukenov S.K., Zhukenov M.K., and Ispulov N.A. // Bull. University of Karaganda-Physics. – 2019. – V. 2. – Iss. 9–4 . – P. 29–34.
18. Ispulov N.A., Qadir A., Shah M.A., et al. // Chinese Phys. B. – 2016. – No. Art. 038102. DOI: 10.1088/1674-1056/25/3/038102.
19. Ispulov N.A., Qadir A., Zhukenov M.K., and Arinov E. // Adv. Math. Phys. – 2017. – No. Art. 4898467. DOI: 10.1155/2017/4898467.
20. Ispulov N.A., Qadir A., Zhukenov M.K., et al. // Adv. Math. Phys. – 2017. – No Art. 5236898. DOI: 10.1155/2017/5236898.
21. Тлеукенов С.К. // Труды школы-семинара «Волны-2016». Акустика неоднородных сред. – 2016. – Т. 8. – С. 54–55.
22. Рязанов М.И. Электродинамика конденсированных сред. – М.: Наука, 1984. – 304 с.
23. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1988. – 552 с.

Поступила в редакцию 19.01.2021,
после доработки – 19.05.2021.

Торайгыров университет, г. Павлодар, Республика Казахстан

Досумбеков Кайрат Рахметоллович, магистр, ст. преподаватель каф. физики, математики и приборостроения Торайгырова университета, e-mail: kairat_83@indox.ru;

Испулов Нурлыбек Айдаргалиевич, к.ф.-м.н., доцент КСОН МОН РК, чл.-корр. МАИН, профессор каф. физики, математики и приборостроения Торайгырова университета, e-mail: nurlybek_79@mail.ru;

Курманов Алмас Аскарович, магистр, ст. преподаватель каф. физики, математики и приборостроения Торайгырова университета, e-mail: almaskurmanov@mail.ru;

Жумабеков Алмар Жумагалиевич, магистр, ст. преподаватель каф. физики, математики и приборостроения Торайгырова университета, e-mail: almar89-89@mail.ru.