С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік
университетінің ғылыми журналы
Научный журнал Павлодарского государственного
университета имени С. Торайгырова

1997 ж. құрылған
Основан в 1997 г.

Ï Ì Ó
ÕÀÁÀÐ Ø Û Ñ Û

ÂÅÑÒ Í ÈÊ Ï ÃÓ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

1-2 2012

ISSN 1811-1807. Вестник ПГУ

Научный журнал Павлодарского государственного университета
имени С. Торайгырова

СВИДЕТЕЛЬСТВО
о постановке на учет средства массовой информации
№ 4533-Ж
выдано Министерством культуры, информации и общественного согласия
Республики Казахстан
31 декабря 2003 года

МАЗМҰНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

ARINOV E., SARSENBAYEV ZH. Y.

VARIOUS FORMS OF FLAT LOSS OF STABILITY OF ASYMMETRIC ELASTIC-PLASTIC EQUILIBRIUM OF PLASTIC HETEROGENEOUS MASSIF OF ROCKS AROUND HORIZONTAL PIT

Түйіндеме

Мақалада иілімді біртекті емес тау-кен жыныстарының массивтеріндегі горизонтальді қуыс маңайындағы жазық тұрақтылық және қосымша шешімнің пайда болуына байланысты массив тұрақтылығының орнықтылығының жоғалуы қарастырылған.

Resume

The flat balance of plastic heterogeneous massif of rocks around the horizontal pit, and loss of stable equilibrium of the massif, relevant to the rise of additional solutions are considered in this article.

УДК 539.3:534.2

Н.А. ИСПУЛОВ, А. К. СЕЙТХАНОВА, А.Б. ИСКАКОВА

О ПОСТРОЕНИИ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ, СТРУКТУРЫ МАТРИЦАНТА И УРАВНЕНИЙ ДИСПЕРСИИ ТЕРМОУПРУГИХ ВОЛН В АНИЗОТРОПНЫХ СРЕДАХ РОМБИЧЕСКОЙ И ГЕКСАГОНАЛЬНОЙ КЛАССОВ

1 Матричная формулировка задач распространения термоупругих волн

Распространение термоупругих волн в анизотропных средах описывается уравнениями движения, решаемых совместно с уравнением теплопроводности Фурье и уравнением притока тепла, которые имеют вид:

$$\sigma_{ij,j} = \rho \ddot{U}_i \qquad (1)$$

$$\lambda_{ij} \frac{\partial \theta}{\partial x_j} = -q_i \qquad (2)$$

$$\frac{\partial q_i}{\partial x_i} = -i\omega \beta_{ij} \varepsilon_{ij} - i\omega \frac{c_\varepsilon}{T_0} \theta \qquad (3)$$

где σ_{ij} - тензор напряжения,   -плотность среды, λ_{ij} - тензор теплопроводности, q_i - вектор притока тепла,   - круговая частота,

β_{ij} - термомеханические постоянные $\beta_{ij} = \beta_{ji}$, ε_{ij}- тензор деформации, $\tilde{n}$ -теплоемкость при постоянной деформации, $\theta = T - T_0$ - приращение температуры по сравнению с температурой естественного состояния T_0, $\left|\frac{\theta}{T_0}\right| \prec\prec 1$ для малых деформаций.

Физико-механические величины связаны соотношением Дюгамеля-Неймана:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl}\varepsilon_{kl} - \beta_{ij}\theta \tag{4}$$

Здесь c_{ij} - упругие параметры, $c_{ijkl}=c_{jikl}=c_{ijlk}=c_{klij}$;$\varepsilon_{kl}$; t - тензор малых деформаций Коши.

Уравнения (1)-(4) определяют взаимосвязь механических напряжений и температуры как функции независимых переменных – теплового поля и деформации.

Таким образом, соотношения (1)-(4) составляют замкнутую систему уравнений термоупругости, которая описывает распространение термоупругих волн.

На основе метода разделения переменных в случае гармонической зависимости от времени:

$$\left[U_i(x,y,z,t);\ \sigma_{ij}(x,y,z,t);\theta;\ q_z\right] = \left[U_i(z),\sigma_{ij}(z),\theta;\ q_z\right]e^{i(\omega t - mx - ny)} \tag{5}$$

Система уравнений (1)-(4) приводится к системе дифференциальных уравнений 1-го порядка с переменными коэффициентами, описывающей распространение гармонических волн:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W} \tag{6}$$

Здесь $B = B\left[c_{ijkl}(z),\beta_{ij}(z),\omega,m,n\right]$ - матрица коэффициентов, элементы которой содержат в себе параметры среды, в которой распространяются термоупругие волны; m,n-компоненты волнового вектора $\sim$.

Вектор $\vec{W}$ имеет вид:

$$\vec{W}(x,y,z,t) = \left[u_z(z),\sigma_{zz},u_x(z),\sigma_{xz},u_y(z),\sigma_{yz},\theta,q_z\right]^t \exp(i\omega t - imx - iny) \tag{7}$$

Символ t означает операцию транспонирования вектора - строки в вектор – столбец.

Неоднородность среды предполагается вдоль оси Z. При построении матрицы коэффициентов B используется представление решения в виде (5), из системы уравнений (1)-(4) выделяются производные по Z и исключаются компоненты тензора напряжения не входящие в граничные условия. Множитель $\exp(i\omega t - imx - iny)$ всюду опущен.

Структуры матрицы B и вектор – столбец граничных условий в объемном случае для ромбической и гексагональной сингонии в случае оси симметрии второго порядка и неоднородности вдоль оси Z:

$$B = \begin{bmatrix} 0 & b_{12} & b_{13} & 0 & b_{15} & 0 & b_{17} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{24} & 0 & b_{26} & 0 & 0 \\ b_{24} & 0 & 0 & b_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_{13} & b_{43} & 0 & b_{45} & 0 & b_{47} & 0 \\ b_{26} & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{56} & 0 & 0 \\ 0 & b_{15} & b_{45} & 0 & b_{65} & 0 & b_{67} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & b_{78} \\ 0 & -i\omega b_{17} & -i\omega b_{47} & 0 & -i\omega b_{67} & 0 & b_{87} & 0 \end{bmatrix}; \qquad \vec{W} = \begin{pmatrix} u_z \\ \sigma_{zz} \\ u_x \\ \sigma_{xz} \\ u_y \\ \sigma_{yz} \\ \theta \\ q_z \end{pmatrix} \qquad (8)$$

Из структуры матрицы коэффициентов (8) следует, что в пространственном случае упругие волны различной поляризации и тепловая волна взаимосвязаны.

Отличные от нуля элементы матрицы B b_{13}, b_{24} определяют взаимную трансформацию продольной и поперечной X - поляризованной волн. Элементы b_{15}, b_{26} описывают взаимосвязь поперечной Y-поляризации с продольной волной. Отличный от нуля элемент b_{45} определяет взаимную трансформацию между волнами поперечной поляризации.

Отличие от нуля коэффициента b_{17}: $\quad b_{17} = \dfrac{\beta_{33}}{c_{33}}$

означает, что продольная волна распространяется с термоупругим эффектом.

Не нулевые элементы b_{47} и b_{67}:

$$b_{47} = \left(\frac{c_{13}}{c_{33}}\beta_{33} - \beta_{11}\right)im; \qquad b_{67} = \left(\frac{c_{23}}{c_{33}}\beta_{33} - \beta_{22}\right)in$$

означают влияние на упругие волны поперечных поляризаций термоупругого эффекта. При этом b_{47} описывает влияние термоупругого эффекта на упругую поперечную волну X- поляризации, а b_{67} влияние термоупругого эффекта на поперечную волну Y- поляризации.

Аналогично, для термоупругих волн, распространяющихся в анизотропной среде кубической сингонии построена матрица коэффициентов в объемном случае и проведен анализ матриц коэффициентов. Также получены структуры матриц коэффициентов при распространении термоупругих волн в анизотропных средах ромбической и гексагональной и кубической сингоний в плоскости XZ и YZ, определены типы волн и взаимная трансформация волн различной поляризации.

2 Структура матриканта

Построение структуры матриканта основано на его представлении в форме экспоненциального матричного ряда

$$T = E + \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_1)B(z_2)dz_1 dz_2 + \ldots \tag{9}$$

И аналогичном представлении обратного матриканта T^{-1}

$$T^{-1} = E - \int_0^z B dz_1 + \int_0^z \int_0^{z_1} B(z_2)B(z_1)dz_1 dz_2 - \ldots \tag{10}$$

Оба ряда абсолютно и равномерно сходятся на любом конечном интервале, в котором элементы матрицы B(z) непрерывны.

При этом справедливо соотношение:

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E \tag{11}$$

Построение структуры матриканта есть установление зависимости между элементами прямой и обратной матриц T и T^{-1} на основе поэлементного их сравнения.

Бесконечные матричные ряды можно представить в виде

$$T = T_ч + T_{нч}, \quad T^{-1} = T_ч^{-1} - T_{нч}^{-1} \tag{12}$$

где $T^{\pm}_{ч,нч}$ – сумма четных и нечетных рядов (9) и (10).

Методом математической индукции доказывается, что структура $T^{-1}_{(2n)}$ и $T^{-1}_{(2n+1)}$ сохраняется при любом n.

Структура матриканта, в случае распространения термоупругих волн в кубической, гексагональной и ромбической сингоний в объемном случае, определена в виде:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{42} & t_{32} & -t_{62} & t_{52} & -t_{82} & t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{41} & -t_{31} & t_{61} & -t_{51} & t_{81} & -t_{71} \\ -t_{24} & t_{14} & t_{44} & -t_{34} & t_{64} & -t_{54} & t_{84} & -t_{74} \\ t_{23} & -t_{13} & -t_{43} & t_{33} & -t_{63} & t_{53} & -t_{83} & t_{73} \\ -t_{26} & t_{16} & t_{46} & -t_{36} & t_{66} & -t_{56} & t_{86} & -t_{76} \\ t_{25} & -t_{15} & -t_{45} & t_{35} & -t_{65} & t_{55} & -t_{85} & t_{75} \\ -t_{28} & t_{18} & t_{48} & -t_{38} & t_{68} & -t_{58} & t_{88} & -t_{78} \\ t_{27} & -t_{17} & -t_{47} & t_{37} & -t_{67} & t_{57} & -t_{87} & -t_{77} \end{pmatrix} \quad (13)$$

элементы t_{ij} матриканта T^{-1} являются элементами прямого матриканта T.

Получены структура матриканта при распространении термоупругих волн в данных классах в плоскости XZ, в плоскости YZ.

В одномерном случае (распространение волн вдоль оси Z, m=0, n=0) структура (13) примет вид:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{22} & -t_{12} & -t_{82} & t_{72} \\ -t_{21} & t_{11} & t_{81} & -t_{71} \\ -t_{28} & t_{18} & t_{88} & -t_{78} \\ t_{27} & -t_{17} & -t_{87} & t_{77} \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{44} & -t_{34} \\ -t_{43} & t_{33} \end{pmatrix}; \quad T^{-1} = \begin{pmatrix} t_{66} & -t_{56} \\ -t_{65} & t_{55} \end{pmatrix} \quad (14)$$

Построение структуры матриканта, в данном случае, есть установление зависимости между элементами прямой и обратной матриц T и T^{-1} на основе поэлементного их сравнения.

Разложение структуры (8x8) матрицы (13) на матрицу (4x4) и две матрицы (2x2) означает независимость распространения упругой продольной волны с термоэффектом и упругих поперечных волн. В то же время на упругие поперечные волны, при одномерном распространении в анизотропных средах кубической, гексагональной и ромбической сингоний, вдоль оси симметрии четного порядка, также распространяются без термоупругого эффекта.

3 Уравнения дисперсии для упругих и термоупругих анизотропных сред

Основной характеристикой, определяющей закономерности волновых процессов в неограниченных периодических структурах, являются уравнения дисперсии. Дисперсионные соотношения представляют собой зависимости $\nu = \nu(\omega)$, $\kappa = \kappa(\omega)$, $\omega = \omega(\kappa)$, $\omega = \omega(\nu)$. Где - скорость, - циклическая частота, - волновой вектор. В частном случае мы получаем зависимость $\kappa = \kappa(\omega)$. Полученная выше структура матриканта позволяет модифицировать условие существования нетривиальных решений и в два раза понизить степень характеристического уравнения.

На основе модифицированной формы условия существования нетривиальных решений:

$$\det[\hat{p} - E\cos\tilde{k}h] = 0 \tag{15}$$

где

$$p = \frac{1}{2}[T + T^{-1}] \tag{16}$$

получены уравнения дисперсии термоупругих волн, распространяющихся в анизотропных средах кубической, гексагональной и ромбической сингоний в объемном случае, имеющие следующий вид:

$$\cos\tilde{k}_1 h = -\frac{a}{4} - \frac{1}{4\sqrt{3}}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}}\right) -$$

$$\frac{1}{5}\left(\sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} + \frac{5\left(a^3 - 4ba + 8c\right)}{3\sqrt[3]{\gamma}} + 3a^2 - 8b}\right)$$

$$\cos\tilde{k}_2 h = -\frac{a}{4} - \frac{1}{4}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}}\right) +$$

$$+\frac{1}{5}\left(\sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} + \frac{5\left(a^3 - 4ba + 8c\right)}{3\sqrt[3]{\gamma}} + 3a^2 - 8b}\right)$$

$$\cos\tilde{k}_3 h = -\frac{a}{4} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}}\right) -$$

$$-\frac{1}{5}\left(\sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} + \frac{5\left(a^3 - 4ba + 8c\right)}{3\sqrt[3]{\gamma}} + 3a^2 - 8b}\right)$$

$$\cos\tilde{k}_4 h = -\frac{a}{4} + \frac{1}{4}\left(\sqrt{3\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{5(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}}}\right) +$$

$$+\frac{1}{5}\left(\sqrt{-\sqrt[3]{\gamma} + 3a^2 - 8b + \frac{2(b^2 - 3ac + 12d)}{\sqrt[3]{\gamma}} - \frac{5\left(a^3 - 4ba + 8c\right)}{3\sqrt[3]{\gamma}} + 3a^2 - 8b}\right)$$

где

$$\gamma = \sqrt[3]{2b^3 - 9(ac + 8d)b + 27(c^2 + a^2 d) + \sqrt{(2b^3 - 9(ac + 8d)b + 27(da^2 + c^2))^2 - 4(b^2 - 3ac + 12d)^3}}$$

a,b,c – элементы матрицы (16)

Данные уравнения дисперсии получены с помощью математического пакета *Mathematic 4.0.*

Знание матрицы монодромии (матрицант одного периода неоднородности) позволяет в аналитической форме получить представление матрицанта произвольного периодически неоднородного слоя.

При наличии n периодов последовательность уравнений

$$\vec{u}_1 = T\vec{u}_0, \vec{u}_2 = T\vec{u}_1, \ldots, \vec{u}_n = T\vec{u}_{n-1} \tag{17}$$

приводит к уравнению

$$\vec{u}_n = T^n \vec{u}_0 \tag{18}$$

Таким образом, вычисление матрицанта периодически неоднородного слоя, имеющего n периодов, связано с вычислением n – ой степени матрицы монодромии.

Введение важной для регулярных структур матрицы p (16) дает рекуррентное соотношение:

$$T^2 = 2pT - E \tag{19}$$

Последовательное применение (19) позволяет представить T_n в виде:

$$T^n = P_n(p)T \quad P_{n\ 1}(p) \tag{20}$$

где $P_n(p)$ – матричные полиномы Чебышева – Гегенбауэра.

Получены уравнения дисперсии упругих волн в однородных анизотропных слоях при различных граничных условиях: уравнение дисперсии упругих волн в анизотропном слое ромбической сингонии при жестком закреплении границ; уравнение дисперсии упругих волн в анизотропном слое в случае свободных границ и в случае свободно-жестких границ.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. С.К. Тлеукенов Метод матрицанта. Павлодар, НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004, 148 с.

2. Новацкий В. Теория упругости. - М.: Мир, 1986, 556 с.

3. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. М.: Наука,1988, 552 с.

4. Тлеукенов С. К., Орынбасаров К. А. О матрицах фундаментальных решений уравнений динамики неоднородных анизотропных сред. Изв. АН Каз ССР, сер. физ.-мат.,1991, N 5, С. 87-91.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

Н.А. ИСПУЛОВ, А.К. СЕЙТХАНОВА, А.Б. ИСҚАҚОВА

АНИЗОТРОПТЫ ОРТАЛАРДЫҢ РОМБЫЛЫҚ ЖӘНЕ ГЕКСАГОНАЛДЫҚ КЛАСТАРДАҒЫ ТЕРМОСЕРПІМДІ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ДИФФЕРЕНЦИАЛДЫҚ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ ЖҮЙЕСІН, МАТРИЦАНТ ҚҰРЫЛЫМЫН ЖӘНЕ ДИСПЕРСИЯ ТЕҢДЕУЛЕРІН ҚҰРУ ТУРАЛЫ

N.A. ISPULOV, A.K. SEYTHANOVA, A.B. ISKAKOVA

ABOUT CREATION OF SYSTEM OF DIFFERENTIAL EQUATIONS, STRUCTURES OF THE MATRICIANT AND THE EQUATIONS OF DISPERSION OF THERMOELASTIC WAVES IN NON-ISOTROPIC MEDIUMS RHOMBIC AND HEXAGONAL CLASSES

Түйіндеме

Термомеханикалық эффектімен болатын серпімді орталарда толқындық процестердің заңдылықтарды зерттеу актуалдыгы, геофизика, сейсмология, композиттік материалдардың механикасының теориялық және қолданбалы есептерді шешуінде қажеттілігімен байланысты. Байланысқан қозгалыс теңдеулері мен жылуөткізгіштік теңдеулері физика–механикалық параметрлердің күрделігі мен көп болуымен ерекшеленеді. Осыган байланысты деформацияланатын қатты дене механикасының – термосерпімділік деген тарауы қарқынды дамып келеді. Осы багыттың аясында анизотропты орталардың кейбір физика–механикалық қасиеттерін қолдана отырып, байланысқан жылулық және механикалық өрістер зерттеледі.

Resume

The urgency of research of laws of wave processes in elastic environments with thermo mechanical effect is connected with necessity of the decision of theoretical and applied problems of geophysics, seismology, mechanics of composite materials etc. Connected equations of movement and the heat conductivity equation differ complexity and an abundance of physical–mechanical parameters. In this connection the section of mechanics of a deformable firm body, - thermo elasticity intensively develops. Within the limits of this direction, leaning against use of certain physical–mechanical properties anisotropic environments, the connected thermal and mechanical fields are studied.

Теруге 20.06.2012 ж. жіберілді. Басуға 28.06.2012 ж. қол қойылды.
Форматы 70x100 1/16. Кітап-журнал қағазы.
Көлемі шартты 7,9 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.
Компьютерде беттеген А.Р. Тайлақова
Корректорлар: Б.Б. Әубәкірова, А. Елемесқызы, А.Р. Омарова
Тапсырыс № 1962

Сдано в набор 20.06.2012 г. Подписано в печать 28.06.2012 г.
Формат 70x100 1/16. Бумага книжно-журнальная.
Объем 7,9 ч.-изд. л. Тираж 300 экз. Цена договорная.
Компьютерная верстка А.Р. Тайлакова
Корректоры: Б.Б. Аубакирова, А. Елемескызы, А.Р. Омарова
Заказ № 1962

«КЕРЕКУ» баспасы
С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.
67-36-69
E-mail: publish@psu.kz
kereky@mail.ru