С. Торайғыров атындағы Павлодар мемлекеттік
университетінің ғылыми журналы
Научный журнал Павлодарского государственного
университета имени С. Торайгырова

1997 ж. құрылған
Основан в 1997 г.

Ï Ì Ó
ÕÀÁÀÐ Ø Û Ñ Û

ÂÅÑÒ Í ÈÊ Ï ÃÓ

ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СЕРИЯ

1-2 2012

ISSN 1811-1807. Вестник ПГУ

Научный журнал Павлодарского государственного университета
имени С. Торайгырова

СВИДЕТЕЛЬСТВО
о постановке на учет средства массовой информации
№ 4533-Ж
выдано Министерством культуры, информации и общественного согласия
Республики Казахстан
31 декабря 2003 года

МАЗМҰНЫ

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

УДК 534.2

Н.А. ИСПУЛОВ, А.К. СЕЙТХАНОВА

О РАСПРОСТРАНЕНИИ РЭЛЕЕВСКИХ ВОЛН В НЕОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ СРЕДЕ

Физика поверхностных акустических волн составляет основу новой, развивающейся области прикладной физики и техники, объединяющей такие различные дисциплины, как неразрушающий контроль, сейсмология и обработка сигналов в электронных системах.

Чрезвычайно низкая скорость распространения и, следовательно, очень малая длина волны акустических (ультразвуковых) волн позволяют очень просто осуществлять с их помощью те операции, которые было весьма трудно выполнить при любой другой технологии. Быстрое развитие физики и техники ПАВ обусловлено объединением усилий специалистов по теории упругости, физики твердого тела и радиотехнике. Благодаря этому было обеспечено быстрое изучение акустических волн этого типа и достигнут значительный успех в соответствующих инженерных разработках [1]. Методом исследования является аналитический метод матриципанта, разработанный профессором С.К. Тлеукеновым и его учениками [2].

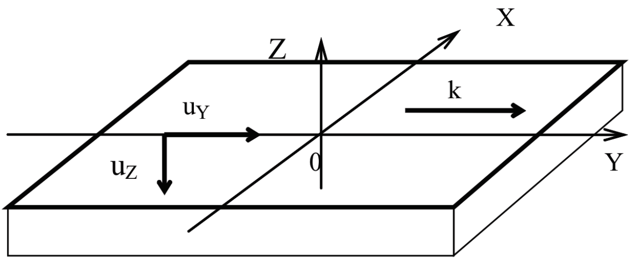

Рисунок 1 – Система координат к вопросу о распространении рэлеевской волны

При распространении рэлеевских волн в неоднородной изотропной среде в плоскости *yz* (при наличии неоднородности вдоль оси *z*) система дифференциальных уравнений 1-го порядка имеет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dU_z}{dz} = \dfrac{1}{\lambda+2\mu}\sigma_{zz} + ik_y\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}U_y \\ \dfrac{d\sigma_{zz}}{dz} = -\rho\omega^2 U_z + ik_y\sigma_{yz} \\ \dfrac{dU_y}{dz} = \dfrac{1}{\mu}\sigma_{yz} + ik_y U_z \\ \dfrac{d\sigma_{yz}}{dz} = ik_y\dfrac{\lambda}{\lambda+2\mu}\sigma_{zz} + \left(\left(\lambda+2\mu-\dfrac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right)k_y^2 - \omega^2\rho\right)U_y \end{cases} \qquad (1)$$

или в матричном виде (1) имеет вид:

$$\frac{d\vec{W}}{dz} = B\vec{W} \qquad (2)$$

где $\vec{W} = (U_z; \sigma_{zz}; U_y; \sigma_{yz})^t$.

Индекс «t» указывает транспонирование вектор-строки в вектор-столбец.

В (2) структура матрицы коэффициентов имеет вид

$$\hat{B} = \begin{pmatrix} 0 & b_{12} & b_{15} & 0 \\ b_{21} & 0 & 0 & b_{26} \\ b_{26} & 0 & 0 & b_{56} \\ 0 & b_{15} & b_{65} & 0 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Решение системы (2) будем искать в виде [2]:

$$T = \hat{E}\cos\tilde{k}z + \frac{\hat{B}}{\tilde{k}}\sin\tilde{k}z \qquad (4)$$

Получим t_{ij} в формуле (4) в явной форме. Матрицы T_0 и $\hat{E}$ будут иметь вид:

$$T_0 = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & t_{14} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} & t_{24} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} & t_{34} \\ t_{41} & t_{42} & t_{43} & t_{44} \end{pmatrix} \quad \hat{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$t_{11} = \cos\tilde{k}z; \quad t_{12} = b_{12}\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}} = \frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}};$$

$$t_{13} = b_{15}\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}} = ik_y\frac{1}{\lambda+2\mu}\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}}; \quad t_{14} = 0;$$

$$t_{21}=b_{21}\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}}=-\rho\omega^2\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}};\ \ t_{22}=\cos\tilde{k}z;$$

$$t_{23}=0;\quad t_{24}=b_{26}\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}}=ik_y\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}};$$

$$t_{31}=b_{26}\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}}=ik_y\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}};\quad t_{32}=0;$$

$$t_{33}=\cos\tilde{k}z;\ \ t_{34}=b_{56}\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}}=\frac{1}{\mu}\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}};$$

$$t_{41}=0;\qquad t_{42}=b_{15}\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}}=ik_y\frac{\lambda}{\lambda+2\mu}\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}};$$

$$t_{43}=b_{65}\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}}=\left(\left(\lambda+2\mu-\frac{\lambda^2}{\lambda+2\mu}\right)k_y^2-\omega^2\rho\right)\frac{\sin\tilde{k}z}{\tilde{k}}.$$

Отсюда следует, что

$$t_{13}=t_{42},\qquad t_{24}=t_{31},\qquad t_{44}=t_{33}=t_{22}=t_{11}$$

Матрица T_0 будет иметь вид

$$T_0=\begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} & 0 \\ t_{21} & t_{11} & 0 & t_{24} \\ t_{24} & 0 & t_{11} & t_{34} \\ 0 & t_{13} & t_{43} & t_{11} \end{pmatrix} \tag{5}$$

Связь между амплитудами падающих и отраженных волн зададим в виде:

$$\begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_y \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix}=T_0\begin{pmatrix} U_{z_0} \\ \sigma_{zz_0} \\ U_{y_0} \\ \sigma_{yz_0} \end{pmatrix} \tag{6}$$

или

$$\vec{W}=T_0\vec{W}_0 \tag{6'}$$

Вектор смещения для изотропных сред представляется в виде:

$$\vec{U}=grad\varphi+rot\vec{\psi} \tag{7}$$

Скалярный и векторный потенциалы задаются в следующем виде:

$$\varphi = A_1 e^{-ik_z z - ik_y y} + B_1 e^{ik_z z - ik_y y}$$
$$\psi = A_2 e^{-ik_z z - ik_y y} + B_2 e^{ik_z z - ik_y y} \tag{8}$$

где A_1, A_2, B_1, B_2 - амплитуды падающих и отраженных волн.

Запишем уравнение (6) в другом виде с учетом (8)

$$\begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_y \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = G \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} \tag{9}$$

Теперь приравняем (6) и (9), получим:

$$G \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} U_{z_0} \\ \sigma_{zz_0} \\ U_{y_0} \\ \sigma_{yz_0} \end{pmatrix} \tag{10}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix} = G^{-1} T \begin{pmatrix} U_{z_0} \\ \sigma_{zz_0} \\ U_{y_0} \\ \sigma_{yz_0} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Компоненты вектора смещения $\vec{U}$ - U_y и U_z в случае распространения рэлеевских волн равны:

$$U_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y} - \frac{\partial \psi}{\partial z}; \quad U_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{12}$$

Выразим из (11) компоненты тензора смещения:

$$\sigma_{zz} = (\lambda + 2\mu)\frac{dU_z}{dz} - \lambda\, ik_y U_y$$
$$\sigma_{yz} = \mu \frac{dU_y}{dz} - \mu\, ik_y U_z \tag{13}$$

Запишем (9) в виде:

$$\begin{pmatrix} U_z \\ \sigma_{zz} \\ U_y \\ \sigma_{yz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ B_1 \\ A_2 \\ B_2 \end{pmatrix}$$

Компоненты матрицы G имеют вид:

$g_{11} = -ik_z$; $\qquad g_{12} = ik_z$;

$g_{13} = -ik_y$; $\qquad g_{14} = -ik_y$;

$g_{21} = -(\lambda + 2\mu)k_z^2 - \lambda k_y^2$; $\qquad g_{22} = -(\lambda + 2\mu)k_z^2 - \lambda k_y^2$;

$g_{23} = -\left((\lambda + 2\mu)k_y k_z - \lambda k_y k_z\right)$; $\qquad g_{24} = (\lambda + 2\mu)k_y k_z - \lambda k_y k_z$;

$g_{31} = -ik_y$; $\qquad g_{32} = -ik_y$;

$g_{33} = ik_z$; $\qquad g_{34} = -ik_z$;

$g_{41} = -2\mu k_y k_z$; $\qquad g_{42} = 2\mu k_y k_z$;

$g_{43} = \mu\left(k_z^2 - k_y^2\right)$ $\qquad g_{43} = \mu\left(k_z^2 - k_y^2\right)$.

Отсюда следует, что

$g_{11} = -g_{12} = -g_{33} = g_{34}$

$g_{13} = g_{14} = g_{31} = g_{32}$

$g_{41} = -g_{42}$

$g_{21} = g_{22}$

$g_{43} = g_{44}$

$g_{23} = -g_{24}$

Матрица G будет иметь вид

$$G = \begin{pmatrix} g_{11} & -g_{11} & g_{13} & g_{13} \\ g_{21} & g_{21} & g_{23} & -g_{23} \\ g_{13} & g_{13} & -g_{11} & g_{11} \\ g_{41} & -g_{41} & g_{43} & g_{43} \end{pmatrix} \qquad (14)$$

Найдем обратную матрицу $G^{\;1}$ по формуле

$$G^{-1} = \frac{1}{\det G} \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} & G_{13} & G_{14} \\ G_{21} & G_{22} & G_{23} & G_{24} \\ G_{31} & G_{32} & G_{33} & G_{34} \\ G_{41} & G_{42} & G_{43} & G_{44} \end{pmatrix}$$

$$\det G = \begin{pmatrix} g_{11} & -g_{11} & g_{13} & g_{13} \\ g_{21} & g_{21} & g_{23} & -g_{23} \\ g_{13} & g_{13} & -g_{11} & g_{11} \\ g_{41} & -g_{41} & g_{43} & g_{43} \end{pmatrix} = g_{11}A_{11} + (-g_{11})A_{12} + g_{13}A_{13} + g_{13}A_{14}$$

где A – алгебраическое дополнение.

Обратная матрица $G\ ^{1}$ будет иметь вид

$$G^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{pmatrix} \tag{15}$$

Проверка $GG^{-1} = E$

$$GG^{-1} = \begin{pmatrix} g_{11} & -g_{11} & g_{13} & g_{13} \\ g_{21} & g_{21} & g_{23} & -g_{23} \\ g_{13} & g_{13} & -g_{11} & g_{11} \\ g_{41} & -g_{41} & g_{43} & g_{43} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} g_{11} & g_{21} & g_{31} & g_{41} \\ g_{12} & g_{22} & g_{32} & g_{42} \\ g_{13} & g_{23} & g_{33} & g_{43} \\ g_{14} & g_{24} & g_{34} & g_{44} \end{pmatrix} = E$$

Вычислим матрицу $\hat{L}$ (в явном виде):

$$\hat{L} = G\ ^{1}T_0$$

Рассмотрим случай, когда границы среды свободны от напряжения

$$_{yz\ 0} = 0$$

$$_{z\ 0} = 0$$

$$\begin{array}{c} A_1 \\ 0 \\ B_1 \\ 0 \end{array} = L \begin{array}{c} U_{z_0} \\ 0 \\ U_{y_0} \\ 0 \end{array} = \begin{array}{cccc} l_{11} & l_{12} & l_{13} & l_{14} \\ l_{21} & l_{22} & l_{23} & l_{24} \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & l_{34} \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & l_{44} \end{array} \begin{array}{c} U_{z_0} \\ 0 \\ U_{y_0} \\ 0 \end{array}$$

$$l_{21}U_{z_0}+l_{23}U_{y_o}=0$$
$$l_{41}U_{z_0}+l_{43}U_{y_o}=0$$

Условием существования нетривиальных решений является равенство нулю следующего определителя

$$\det\begin{vmatrix} l_{21} & l_{23} \\ l_{41} & l_{43}\end{vmatrix}=0$$

$$l_{21}l_{42}-l_{23}l_{41}=0$$

Рассмотрим частный случай при $T_0=E$

$$L=G^{-1}E$$

$$l_{21}l_{43}-l_{23}l_{41}=0$$

$$-\frac{\left(k_z^2-k_y^2\right)}{2ik_z\left(k_y^2+k_z^2\right)}\cdot\frac{(\lambda+2\mu)k_z^2+\lambda k_y^2}{2ik_z(\lambda+2\mu)\left(k_z^2+k_y^2\right)}-\frac{\mu k_y}{i(\lambda+2\mu)\left(k_z^2+k_y^2\right)}\cdot\frac{k_y}{i\left(k_y^2+k_z^2\right)}=0$$

$$\left(k_z^2-k_y^2\right)\left((\lambda+2\mu)k_z^2+\lambda k_y^2\right)+4\mu k_y^2k_z^2=0 \qquad (16)$$

уравнение Рэлея

В статье рассмотрены задачи распространения упругих поверхностных волн в изотропной среде. Получены уравнения Рэлея, определяющие связь компонентов волнового вектора с упругими параметрами среды, когда границы среды свободны от напряжения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фарнелл Дж. Свойства упругих поверхностных волн. Физическая акустика (под. ред. У. Мэзона), т. VI, гл. 3. М., «Мир», 1973.

2. Тлеукенов С.К. Метод матрицанта. – Павлодар: НИЦ ПГУ им. С. Торайгырова, 2004. - 148 с.

Павлодарский государственный университет имени С. Торайгырова, г. Павлодар. Материал поступил в редакцию 15.08.2012 г.

Н.А. ИСПУЛОВ, А.Қ. СЕЙТХАНОВА

БІРТЕКТІ ИЗОТРОПТЫ ОРТАДАҒЫ РЭЛЕЙ ТОЛҚЫНДАРДЫҢ ТАРАЛУЫ ТУРАЛЫ

N. A. ISPULOV, A.K.SEYTKHANOVA

ABOUT PROPAGATION RAYLEIGH WAVES IN THE NON-UNIFORM ISOTROPIC MEDIUM

Түйіндеме

Изотропты және анизотропты орталарда толқындық процестерді зерттеу қазіргі уақытта матрицалық аппаратты қолданумен байланысты. Серпімді, термосерпімді, электрмагниттік, пьезосерпімді және беттік толқындарды зерттеу үшін бірінші ретті дифференциалдық теңдеулер жүйесінің матрицант құрылымын құрастыруға негізделген матрицалық әдіс қолданылады.

Resume

Studying of wave processes in isotropic and anisotropic environments is connected now with application of matrix аппарат. For studying elastic, thermoelastic, electromagnetic, piezoelastic and surface waves the matrix method based on construction of structure matrizer of system of the differential equations of the first order is used.

УДК 534.2:537.2

С.К. ТЛЕУКЕНОВ

ОБ АНАЛИЗЕ МАТРИЦ КОЭФФИЦИЕНТОВ ЭЛЕКТРОУПРУГИХ ВОЛН, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ В ПЬЕЗОКРИСТАЛЛАХ

При рассмотрении макроскопических свойств кристаллов, можно отвлечься от их дискретного микропериодического строения. При этом кристалл выступает как сплошная однородная анизотропная среда. В самом деле, рассматривая макроскопические свойства кристаллов, мы имеем дело с расстояниями, существенно большими, чем наибольший из периодов кристаллической решетки, и с объемами, гораздо большими, чем объем ячейки. Поэтому можно рассматривать кристалл как сплошную (непрерывную) среду. Следует помнить, что кристалл можно рассматривать как сплошную однородную среду лишь с некоторой точностью, так как реальный пьезоэлектрический кристалл содержит различного рода примеси и несовершенства, имеющие различное объемное распределение (секториальное, зонарное и т.д.). Физические свойства кристалла анизотропны и зависят от направления, их описание зависит от ориентации системы координат. Анизотропность среды определяется либо ее внутренней

Теруге 20.06.2012 ж. жіберілді. Басуға 28.06.2012 ж. қол қойылды.
Форматы 70x100 1/16. Кітап-журнал қағазы.
Көлемі шартты 7,9 б.т. Таралымы 300 дана. Бағасы келісім бойынша.
Компьютерде беттеген А.Р. Тайлақова
Корректорлар: Б.Б. Әубәкірова, А. Елемесқызы, А.Р. Омарова
Тапсырыс № 1962

Сдано в набор 20.06.2012 г. Подписано в печать 28.06.2012 г.
Формат 70x100 1/16. Бумага книжно-журнальная.
Объем 7,9 ч.-изд. л. Тираж 300 экз. Цена договорная.
Компьютерная верстка А.Р. Тайлакова
Корректоры: Б.Б. Аубакирова, А. Елемескызы, А.Р. Омарова
Заказ № 1962

«КЕРЕКУ» баспасы
С. Торайғыров атындағы
Павлодар мемлекеттік университеті
140008, Павлодар қ., Ломов к., 64, 137 каб.
67-36-69
E-mail: publish@psu.kz
kereky@mail.ru