

УДК 624.195:539.3

DOI: 10.32326/1814-9146-2022-84-2-192-206

**НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОЕ СОСТОЯНИЕ
ПОДКРЕПЛЕННЫХ СЛОИСТЫМИ ОБДЕЛКАМИ ТОННЕЛЕЙ
МЕЛКОГО ЗАЛОЖЕНИЯ ПРИ ДЕЙСТВИИ
ТРАНСПОРТНЫХ НАГРУЗОК**

© 2022 г. **Алексеева Л.А.¹, Украинец В.Н.², Гирнис С.Р.²**

¹*Институт математики и математического моделирования,
Алматы, Республика Казахстан*

²*Торайгыров университет, Павлодар, Республика Казахстан*

alexeeva@math.kz

Поступила в редакцию 17.02.2022

На основе аналитического решения задач о действии равномерно движущейся транспортной нагрузки на трехслойную или двухслойную круговую цилиндрическую оболочку в упругом полупространстве проведен сравнительный анализ напряженно-деформированных состояний породного массива в окрестности круговых тоннелей мелкого заложения при различных конструкциях их обделки (трехслойной и двухслойной), по внутренней поверхности которых движется транспортная нагрузка. Внутренним слоем трехслойной обделки является толстостенная упругая оболочка (заполнитель), а внешние слои (обшивка) представляют собой тонкостенные упругие оболочки одинаковой толщины. Двухслойная обделка конструктивно отличается от рассматриваемой трехслойной обделки отсутствием внутреннего слоя обшивки.

Для описания движения полупространства и внутреннего слоя оболочки используются динамические уравнения теории упругости в потенциалах Ламе. Колебания наружных слоев оболочки описываются классическими уравнениями теории тонких оболочек. Уравнения представляются в подвижной системе координат. Контакт между оболочкой и массивом полагается либо жестким, либо скользящим. Контакт между слоями оболочки полагается жестким.

Для решения задачи используется метод неполного разделения переменных. Решение для потенциалов представлено в виде суперпозиции рядов Фурье – Бесселя и контурных интегралов типа Фурье. Далее используется метод разложения потенциалов на плоские волны, которые разлагаются в ряды по цилиндрическим функциям. Решение получено для случая, когда скорость движения нагрузки меньше ее критических скоростей.

Результаты расчетов представлены для тоннелей, подкрепленных стальными оболочками с бетонным наполнителем, в породном массиве при разной глубине заложения. Анализ проведен для осесимметричных транспортных нагрузок при разных скоростях их движения. Из анализа результатов расчетов следует, что применение трехслойной обделки в качестве ограждающей конструкции намного снижает динамическое воздействие транспортной нагрузки на породный массив в окрестности тоннеля и дневную поверхность вдоль его трассы.

Ключевые слова: тоннель, упругое полупространство, трехслойная (двух-слойная) круговая оболочка, движущаяся нагрузка, перемещения, деформации, напряжения.

Введение

При расчете динамики тоннеля на действие транспортной нагрузки (от движущегося внутритоннельного транспорта) обычно рассматриваются модельные задачи о действии на расположенную в упругой среде (упругом пространстве или полупространстве) цилиндрическую оболочку нагрузки, равномерно движущейся по ее внутренней поверхности вдоль образующей. Задача о действии движущейся нагрузки на оболочку в упругом пространстве моделирует динамическое поведение тоннеля глубокого заложения. Более сложной является задача о действии движущейся нагрузки на оболочку в упругом полупространстве, которая моделирует динамическое поведение тоннеля мелкого заложения. Количество опубликованных научных работ в этом направлении немногочисленно и охватывает в основном последние годы, в частности [1–19]. В этих публикациях при построении математической модели обделка тоннеля рассматривалась как однородная упругая круговая цилиндрическая оболочка. Однако использование такой модели подземного сооружения может быть ограничено при использовании в практике строительства двухслойных и трехслойных (например, сталебетонных [20]) цилиндрических обделок.

1. Постановка и аналитическое решение задачи

В качестве расчетной схемы подкрепленного трехслойной обделкой тоннеля мелкого заложения рассмотрим бесконечно длинную круговую цилиндрическую трехслойную оболочку в линейно-упругом, однородном и изотропном полупространстве (массиве) в неподвижных цилиндрической r, θ, z и декартовой x, y, z системах координат. В этих системах координат ось z совпадает с осью оболочки и параллельна свободной от нагрузок горизонтальной границе полупространства (земной поверхности), ось x перпендикулярна к этой границе: $x \leq h$ (рис. 1).

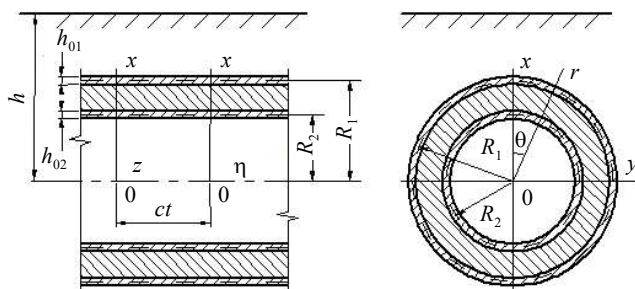


Рис. 1. Трехслойная оболочка в упругом полупространстве

Внутренним слоем оболочки является толстостенная оболочка (заполнитель), а внешние слои (обшивки), жестко сцепленные с заполнителем, представляют собой тонкостенные оболочки с радиусами срединных поверхностей R_1, R_2 и толщинами h_{01}, h_{02} . В силу малости толщин, составляющих обшивку слоев, допускаем, что они контактируют с заполнителем и окружающим массивом вдоль своих срединных поверхностей. Контакт между оболочкой и массивом полагаем либо жестким, либо скользящим при двусторонней связи в радиальном направлении.

На оболочку действует стационарная нагрузка (вид которой не меняется с течением времени) интенсивностью P , которая равномерно движется со скоростью c по ее внутренней поверхности в направлении оси z . Скорость движения нагрузки принимаем дозвуковой, то есть меньше скоростей распространения волн сдвига в заполнителе и массиве.

Физико-механические свойства массива и заполнителя характеризуются соответственно следующими постоянными: $\nu_1, \mu_1, \rho_1; \nu_2, \mu_2, \rho_2$, где ν_k – коэффициент Пуассона, μ_k – модуль сдвига, ρ_k – плотность ($k = 1, 2$); индекс $k = 1$ относится к массиву, $k = 2$ – к заполнителю.

Определим установившуюся реакцию оболочки и окружающей ее среды (массива) на данную нагрузку. Для получения стационарного решения задачи перейдем к подвижной системе координат, перемещающейся вместе с нагрузкой: декартовой $(x, y, \eta = z - ct)$ или цилиндрической $(r, \theta, \eta = z - ct)$.

Для описания движения упругой среды и заполнителя воспользуемся представленными в подвижной системе координат динамическими уравнениями теории упругости в векторной форме [1–3]:

$$(M_{pk}^{-2} - M_{sk}^{-2}) \text{grad div } \mathbf{u}_k + M_{sk}^{-2} \nabla^2 \mathbf{u}_k = \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial \eta^2}, \quad k = 1, 2, \quad (1)$$

где \mathbf{u}_k – векторы смещений точек среды и заполнителя, ∇^2 – оператор Лапласа, $M_{pk} = c/c_{pk}$, $M_{sk} = c/c_{sk}$ – числа Маха в среде и заполнителе; $c_{pk} = \sqrt{(\lambda_k + 2\mu_k)/\rho_k}$, $c_{sk} = \sqrt{\mu_k/\rho_k}$ – скорости распространения волн расширения-сжатия и сдвига в среде и заполнителе, $\lambda_k = 2\mu_k\nu_k/(1 - 2\nu_k)$.

Для описания движения слоев обшивки используем классические уравнения теории оболочек в подвижной системе координат [2, 3]:

$$\begin{aligned} \left[1 - \frac{(1 - \nu_{0k})\rho_{0k}c^2}{2\mu_{0k}} \right] \frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \eta^2} + \frac{1 - \nu_{0k}}{2R_k^2} \frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \theta^2} + \frac{1 + \nu_{0k}}{2R_k} \frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{\nu_{0k}}{R_k} \frac{\partial u_{0rk}}{\partial \eta} = \\ = \frac{1 - \nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}} (q_{\eta k} - q_{\eta R_k}), \\ \frac{1 + \nu_{0k}}{2R_k} \frac{\partial^2 u_{0\eta k}}{\partial \eta \partial \theta} + \frac{1 - \nu_{0k}}{2} \left(1 - \frac{\rho_{0k}c^2}{\mu_{0k}} \right) \frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \eta^2} + \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial^2 u_{0\theta k}}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial u_{0rk}}{\partial \theta} = \\ = \frac{1 - \nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}} (q_{\theta k} - q_{\theta R_k}), \\ \frac{\nu_{0k}}{R_k} \frac{\partial u_{0\eta k}}{\partial \eta} + \frac{1}{R_k^2} \frac{\partial u_{0\theta k}}{\partial \theta} + \frac{h_{0k}^2}{12} \nabla^2 \nabla^2 u_{0rk} + \frac{(1 - \nu_{0k})\rho_{0k}c^2}{2\mu_{0k}} \frac{\partial^2 u_{0rk}}{\partial \eta^2} + \frac{u_{0rk}}{R_k^2} = \\ = - \frac{1 - \nu_{0k}}{2\mu_{0k}h_{0k}} (q_{rk} - q_{rR_k}). \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь для наружного слоя обшивки $k = 1$, для внутреннего – $k = 2$; $\nu_{0k}, \mu_{0k}, \rho_{0k}$ – соответственно коэффициент Пуассона, модуль сдвига и плотность материалов слоев обшивки; u_{0jk} – компоненты перемещений точек срединных поверхностей слоев обшивки; $q_{jR_2} = \sigma_{rj2}|_{r=R_2}$, $q_{j1} = \sigma_{rj2}|_{r=R_1}$, $q_{jR_1} = \sigma_{rj1}|_{r=R_1}$ – составляющие реакции заполнителя и массива; $\sigma_{rj1}, \sigma_{rj2}$ – компоненты тензоров напряжений в массиве и заполни-

нителе; $q_{j2} = P_j(\theta, \eta)$, где $P_j(\theta, \eta)$ – составляющие интенсивности подвижной нагрузки $P(\theta, \eta)$, $j = \eta, \theta, r$. При скользящем контакте оболочки с массивом $q_{\eta R_1} = q_{\theta R_1} = 0$.

Для свободной от нагрузок границы полупространства ($x = h$)

$$\sigma_{xx1} = \sigma_{xy1} = \sigma_{x\eta1} = 0. \quad (3)$$

При различных контактных условиях оболочки с массивом граничные условия имеют вид:

– для скользящего контакта оболочки с массивом

$$\begin{aligned} \text{при } r = R_1 \quad u_{r1} = u_{r2}, \quad u_{j2} = u_{0j1}, \quad \sigma_{r\eta1} = 0, \quad \sigma_{r\theta1} = 0, \\ \text{при } r = R_2 \quad u_{j2} = u_{0j2}, \quad j = r, \theta, \eta; \end{aligned} \quad (4)$$

– для жесткого контакта оболочки с массивом

$$\begin{aligned} \text{при } r = R_1 \quad u_{j1} = u_{j2}, \quad u_{j1} = u_{0j1}, \\ \text{при } r = R_2 \quad u_{j2} = u_{0j2}, \quad j = r, \theta, \eta, \end{aligned} \quad (5)$$

где u_{jk} – компоненты векторов \mathbf{u}_k , $k = 1, 2$.

Выразим векторы \mathbf{u}_k через потенциалы Ламе φ_{jk} ($j = 1, 2, 3, k = 1, 2$) [1–3]:

$$\mathbf{u}_k = \text{grad } \varphi_{1k} + \text{rot}(\varphi_{2k} \mathbf{e}_\eta) + \text{rot rot}(\varphi_{3k} \mathbf{e}_\eta), \quad k = 1, 2, \quad (6)$$

где \mathbf{e}_η – орт оси η .

Из (1) и (6) следует, что φ_{jk} удовлетворяют видоизмененным волновым уравнениям

$$\nabla^2 \varphi_{jk} = M_{jk}^2 \frac{\partial^2 \varphi_{jk}}{\partial \eta^2}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2. \quad (7)$$

Здесь $M_{1k} = M_{pk}$, $M_{2k} = M_{3k} = M_{sk}$.

Используя (6) и закон Гука, через потенциалы Ламе можно выразить компоненты тензоров напряжений σ_{lmk} в массиве ($k = 1$) и заполнителе ($k = 2$) в цилиндрической ($l, m = r, \theta, \eta$) системе координат, а также σ_{lm1} в декартовой ($l, m = x, y, \eta$) системе координат.

Рассмотрим случай действия на оболочку равномерно движущейся по ее внутренней поверхности синусоидальной по η нагрузки с произвольной зависимостью от угловой координаты θ :

$$P(\theta, \eta) = p(\theta) \exp(i\xi\eta), \quad p(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_n \exp(in\theta), \quad (8)$$

$$P_j(\theta, \eta) = p_j(\theta) \exp(i\xi\eta), \quad p_j(\theta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} P_{nj} \exp(in\theta), \quad j = r, \theta, \eta,$$

где константа ξ определяет период $T = 2\pi/\xi$ действующей нагрузки.

В установившемся состоянии зависимость всех величин от η имеет вид (8), поэтому

$$\varphi_{jk}(r, \theta, \eta) = \Phi_{jk}(r, \theta) \exp(i\xi\eta), \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad (9)$$

$$u_{0jk}(\theta, \eta) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u_{0nj} \exp(in\theta) \exp(i\xi\eta), \quad j = r, \theta, \eta, \quad k = 1, 2. \quad (10)$$

Подставляя (9) в (7), получим

$$\nabla_2^2 \Phi_{jk} - m_{jk}^2 \xi^2 \Phi_{jk} = 0, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2, \quad (11)$$

где $m_{jk} = (1 - M_{jk}^2)^{1/2}$, $m_{1k} = m_{pk}$, $m_{2k} = m_{3k} = m_{sk}$, ∇_2^2 – двумерный оператор Лапласа.

Используя (9), можно получить выражения для перемещений u_{lk}^* и напряжений σ_{lmk}^* ($l, m = r, \theta, \eta$) в массиве ($k = 1$) и заполнителе ($k = 2$), а также u_{l1}^* , σ_{lm1}^* ($l, m = x, y, \eta$) в массиве от синусоидальной нагрузки как функции от Φ_{jk} (звездочка означает, что данные компоненты найдены при действии на оболочку синусоидальной подвижной нагрузки (8)).

При дозвуковой скорости движения нагрузки $M_{sk} < 1$, $m_{sk} > 0$, $k = 1, 2$, и решения уравнений (11) можно представить в виде [1–3]:

$$\Phi_{jk} = \Phi_{jk}^{(1)} + \Phi_{jk}^{(2)}, \quad j = 1, 2, 3, \quad k = 1, 2; \quad (12)$$

для массива

$$\begin{aligned} \Phi_{j1}^{(1)} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} K_n(k_{j1}r) \exp(in\theta), \\ \Phi_{j1}^{(2)} &= \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}\right) d\zeta; \end{aligned} \quad (13)$$

для заполнителя

$$\Phi_{j2}^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+3} K_n(k_{j2}r) \exp(in\theta), \quad \Phi_{j2}^{(2)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj+6} I_n(k_{j2}r) \exp(in\theta). \quad (14)$$

Здесь $I_n(k_j r)$, $K_n(k_j r)$ – соответственно модифицированные функции Бесселя и функции Макдональда; $k_{j1} = |m_{j1}\xi|$, $k_{j2} = |m_{j2}\xi|$; $g_j(\xi, \zeta)$, a_{n1}, \dots, a_{n9} – неизвестные функции и коэффициенты, подлежащие определению, $j = 1, 2, 3$.

Как показано в [1], представление потенциалов для полупространства в форме (12) приводит к их выражениям в декартовой системе координат:

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\exp(-xf_j)}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + g_j(\xi, \zeta) \exp((x-h)f_j) \right] \exp(iy\zeta) d\zeta, \quad (15)$$

где

$$f_j = \sqrt{\zeta^2 + k_{j1}^2}, \quad \Phi_{nj} = \left[\frac{\zeta + f_j}{k_{j1}} \right]^n, \quad j = 1, 2, 3.$$

Воспользуемся переписанными для σ_{xx1}^* , σ_{xy1}^* , $\sigma_{x\eta1}^*$ граничными условиями (3) с учетом (15). Выделяя коэффициенты при $\exp(iy\zeta)$ и приравнявая, в силу произвольности y , их к нулю, получим систему трех уравнений, из которой выражаем функции $g_j(\xi, \zeta)$ через неизвестные коэффициенты a_{n1} , a_{n2} , a_{n3} :

$$g_j(\xi, \zeta) = \frac{1}{\Delta^*} \sum_{l=1}^3 \Delta_{jl}^* \exp(-hf_l) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl}. \quad (16)$$

Вид определителя Δ^* и алгебраических дополнений Δ_{jl}^* совпадает с видом аналогичных определителей для неподкрепленной полости в упругом полупространстве и определен в [2]. Здесь Δ^* – определитель Рэлея, который в данном случае имеет вид:

$$\Delta^* = (2\rho_*^2 - \beta^2)^2 - 4\rho_*^2 \sqrt{\rho_*^2 - \alpha^2} \sqrt{\rho_*^2 - \beta^2},$$

$$\alpha = M_{p1}\xi, \quad \beta = M_{s1}\xi, \quad \rho_*^2 = \xi^2 + \zeta^2,$$

и обращается в ноль при $\rho_{*R}^2 = \xi^2 M_R^2$ или в двух точках $\pm \zeta_R = \pm |\xi| \sqrt{M_R^2 - 1}$, где $M_R = c/c_R$ – число Маха, c_R – скорость поверхностных волн Рэлея, которую условимся называть рэлеевской скоростью. Из последнего следует, что Δ^* не обращается в ноль на действительной оси, если $M_R < 1$ или $c < c_R$, то есть при дорэлеевских скоростях движения нагрузки. В этом случае потенциалы (15) с учетом (16) можно представить в виде

$$\Phi_{j1} = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\exp(-xf_j)}{2f_j} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nj} \Phi_{nj} + \exp((x-h)f_j) \sum_{l=1}^3 \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta^*} \exp(-hf_l) \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_{nl} \Phi_{nl} \right] \exp(iy\zeta) d\zeta. \quad (17)$$

Следует отметить, что рэлеевская скорость c_R несколько ниже скорости волн сдвига в массиве.

С учетом (17) можно получить выражения для компонент напряженно-деформированного состояния (НДС) массива в декартовых координатах при $c < c_R$.

Используя известное при $x < h$ соотношение [1]

$$\exp\left(iy\zeta + (x-h)\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}\right) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} I_n(k_j r) \exp(in\theta) \left[\frac{\zeta + \sqrt{\zeta^2 + k_j^2}}{k_j} \right]^n \exp(-h\sqrt{\zeta^2 + k_j^2}),$$

представим Φ_{j1} (12) в цилиндрической системе координат:

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left(a_{nj} K_n(k_{j1} r) + I_n(k_{j1} r) \int_{-\infty}^{\infty} g_j(\xi, \zeta) \Phi_{nj} \exp(-hf_j) d\zeta \right) \exp(in\theta).$$

Подставляя в последнее соотношение выражение $g_j(\xi, \zeta)$ из (16), для $c < c_R$ получим

$$\Phi_{j1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (a_{nj} K_n(k_{j1} r) + b_{nj} I_n(k_{j1} r)) \exp(in\theta), \quad (18)$$

где

$$b_{nj} = \sum_{l=1}^3 \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_{ml} A_{nj}^{ml}, \quad A_{nj}^{ml} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta_{jl}^*}{\Delta^*} \Phi_{ml} \Phi_{nj} \exp(-h(f_l + f_j)) d\zeta.$$

С учетом (18) выражения для компонент НДС массива в цилиндрических координатах при $c < c_R$ примут вид:

$$u_{l1}^* = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[T_{lj1}^{(1)}(K_n(k_{j1} r)) a_{nj} + T_{lj1}^{(2)}(I_n(k_{j1} r)) b_{nj} \right] \exp(i(\xi\eta + n\theta)), \quad (19)$$

$$\frac{\sigma_{lm1}^*}{\mu_1} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 \left[S_{lmj1}^{(1)}(K_n(k_{j1} r)) a_{nj} + S_{lmj1}^{(2)}(I_n(k_{j1} r)) b_{nj} \right] \exp(i(\xi\eta + n\theta)).$$

Здесь $l = r, \theta, \eta$, $m = r, \theta, \eta$;

$$T_{r11}^{(1)} = k_{11} K'_n(k_{11} r), \quad T_{r21}^{(1)} = -\frac{n}{r} K_n(k_{21} r), \quad T_{r31}^{(1)} = -\xi k_{31} K'_n(k_{31} r),$$

$$\begin{aligned}
T_{011}^{(1)} &= \frac{n}{r} K_n(k_{11}r) i, & T_{021}^{(1)} &= -k_{21} K'_n(k_{21}r) i, & T_{031}^{(1)} &= -\frac{n}{r} \xi K_n(k_{31}r) i, \\
T_{\eta 11}^{(1)} &= \xi K_n(k_{11}r) i, & T_{\eta 21}^{(1)} &= 0, & T_{\eta 31}^{(1)} &= -k_{31}^2 K_n(k_{31}r) i, \\
S_{rr11}^{(1)} &= 2 \left(k_{11}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_1 M_{p1}^2 \xi^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11}r) - \frac{2k_{11} K'_n(k_{11}r)}{r}, \\
S_{rr21}^{(1)} &= \frac{2n}{r^2} K_n(k_{21}r) - \frac{2k_{21} K'_n(k_{21}r)}{r}, & S_{rr31}^{(1)} &= -2\xi \left(k_{31}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_{31}r) + \frac{2\xi k_{31} K'_n(k_{31}r)}{r}, \\
S_{\theta\theta 11}^{(1)} &= -2 \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_1 M_{p1}^2 \xi^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11}r) + \frac{2k_{11} K'_n(k_{11}r)}{r}, \\
S_{\theta\theta 21}^{(1)} &= -\frac{2n K_n(k_{21}r)}{r^2} + \frac{2nk_{21} K'_n(k_{21}r)}{r}, & S_{\theta\theta 31}^{(1)} &= \frac{2\xi n^2 K_n(k_{31}r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{31} K'_n(k_{31}r)}{r}, \\
S_{\eta\eta 11}^{(1)} &= -2\xi^2 \left(\frac{1 + \lambda_1 M_{p1}^2}{2\mu_1} \right) K_n(k_{11}r), & S_{\eta\eta 21}^{(1)} &= 0, & S_{\eta\eta 31}^{(1)} &= 2m_{31}^2 \xi^3 K_n(k_{31}r), \\
S_{r\theta 11}^{(1)} &= \left(-\frac{2n K_n(k_{11}r)}{r^2} + \frac{2nk_{11} K'_n(k_{11}r)}{r} \right) i, \\
S_{r\theta 21}^{(1)} &= \left(-\left(k_{21}^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_{21}r) + \frac{2k_{21} K'_n(k_{21}r)}{r} \right) i, \\
S_{r\theta 31}^{(1)} &= \left(\frac{2n\xi K_n(k_{31}r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{31} K'_n(k_{31}r)}{r} \right) i, \\
S_{\theta\eta 11}^{(1)} &= -\frac{2n\xi K_n(k_{11}r)}{r}, & S_{\theta\eta 21}^{(1)} &= \xi k_{21} K'_n(k_{21}r), & S_{\theta\eta 31}^{(1)} &= \frac{n\xi^2 (1 + m_{31}^2) K_n(k_{31}r)}{r}, \\
S_{r\eta 11}^{(1)} &= 2\xi k_{11} K'_n(k_{11}r) i, & S_{r\eta 21}^{(1)} &= -\frac{\xi n K_n(k_{21}r) i}{r}, & S_{r\eta 31}^{(1)} &= -\xi^2 k_{31} (1 + m_{31}^2) K'_n(k_{31}r) i, \\
K'_n(k_{j1}r) &= \frac{dK_n(k_{j1}r)}{d(k_{j1}r)};
\end{aligned}$$

$T_{jl}^{(2)}, S_{lmj}^{(2)}$ получаются из $T_{jl}^{(1)}, S_{lmj}^{(1)}$ заменой K_n на I_n .

Используя соотношения для Φ_{j2} (12), получаем формулы для вычислений компонент НДС заполнителя при $c < c_R$:

$$\begin{aligned}
u_{l2}^* &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 [T_{lj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}r)) a_{nj+3} + T_{lj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}r)) a_{nj+6}] \exp(i(\xi\eta + n\theta)), \\
\frac{\sigma_{lm2}^*}{\mu_2} &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{j=1}^3 [S_{lmj2}^{(1)}(K_n(k_{j2}r)) a_{nj+3} + S_{lmj2}^{(2)}(I_n(k_{j2}r)) a_{nj+6}] \exp(i(\xi\eta + n\theta)).
\end{aligned} \tag{20}$$

Здесь $l = r, \theta, \eta$, $m = r, \theta, \eta$;

$$\begin{aligned}
T_{r12}^{(1)} &= k_{12} K'_n(k_{12}r), & T_{r22}^{(1)} &= -\frac{n}{r} K_n(k_{22}r), & T_{r32}^{(1)} &= -\xi k_{32} K'_n(k_{32}r), \\
T_{\theta 12}^{(1)} &= \frac{n}{r} K_n(k_{12}r) i, & T_{\theta 22}^{(1)} &= -k_{22} K'_n(k_{22}r) i, & T_{\theta 32}^{(1)} &= -\frac{n}{r} \xi K_n(k_{32}r) i,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
T_{\eta 12}^{(1)} &= \xi K_n(k_{12}r)i, \quad T_{\eta 22}^{(1)} = 0, \quad T_{\eta 32}^{(1)} = -k_{32}^2 K_n(k_{32}r)i, \\
S_{rr12}^{(1)} &= 2 \left(k_{12}^2 + \frac{n^2}{r^2} - \frac{\lambda_2 M_{p2}^2 \xi^2}{2\mu_2} \right) K_n(k_{12}r) - \frac{2k_{12}K'_n(k_{12}r)}{r}, \\
S_{rr22}^{(1)} &= \frac{2n}{r^2} K_n(k_{22}r) - \frac{2k_{22}K'_n(k_{22}r)}{r}, \quad S_{rr32}^{(1)} = -2\xi \left(k_{32}^2 + \frac{n^2}{r^2} \right) K_n(k_{32}r) + \frac{2\xi k_{32}K'_n(k_{32}r)}{r}, \\
S_{\theta\theta 12}^{(1)} &= -2 \left(\frac{n^2}{r^2} + \frac{\lambda_2 M_{p2}^2 \xi^2}{2\mu_2} \right) K_n(k_{12}r) + \frac{2k_{12}K'_n(k_{12}r)}{r}, \\
S_{\theta\theta 22}^{(1)} &= -\frac{2nK_n(k_{22}r)}{r^2} + \frac{2nk_{22}K'_n(k_{22}r)}{r}, \quad S_{\theta\theta 32}^{(1)} = \frac{2\xi n^2 K_n(k_{32}r)}{r^2} - \frac{2\xi k_{32}K'_n(k_{32}r)}{r}, \\
S_{\eta\eta 12}^{(1)} &= -2\xi^2 \left(\frac{1 + \lambda_2 M_{p2}^2}{2\mu_2} \right) K_n(k_{12}r), \quad S_{\eta\eta 22}^{(1)} = 0, \quad S_{\eta\eta 32}^{(1)} = 2m_{32}^2 \xi^3 K_n(k_{32}r), \\
S_{r\theta 12}^{(1)} &= \left(-\frac{2nK_n(k_{12}r)}{r^2} + \frac{2nk_{12}K'_n(k_{12}r)}{r} \right) i, \\
S_{r\theta 22}^{(1)} &= \left(-\left(k_{22}^2 + \frac{2n^2}{r^2} \right) K_n(k_{22}r) + \frac{2k_{22}K'_n(k_{22}r)}{r} \right) i, \\
S_{r\theta 32}^{(1)} &= \left(\frac{2n\xi K_n(k_{32}r)}{r^2} - \frac{2n\xi k_{32}K'_n(k_{32}r)}{r} \right) i, \\
S_{\theta\eta 12}^{(1)} &= -\frac{2n\xi K_n(k_{12}r)}{r}, \quad S_{\theta\eta 22}^{(1)} = \xi k_{22}K'_n(k_{22}r), \quad S_{\theta\eta 32}^{(1)} = \frac{n\xi^2(1+m_{32}^2)K_n(k_{32}r)}{r}, \\
S_{r\eta 12}^{(1)} &= 2\xi k_{12}K'_n(k_{12}r)i, \quad S_{r\eta 22}^{(1)} = -\frac{\xi n K_n(k_{22}r)i}{r}, \quad S_{r\eta 32}^{(1)} = -\xi^2 k_{32}(1+m_{32}^2)K'_n(k_{32}r)i; \\
K'_n(k_{j2}r) &= \frac{dK_n(k_{j2}r)}{d(k_{j2}r)};
\end{aligned}$$

$T_{lj2}^{(2)}, S_{lmj2}^{(2)}$ получаются из $T_{lj2}^{(1)}, S_{lmj2}^{(1)}$ заменой K_n на I_n .

Подставляя (10) в (2), получим

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{1k}^2 u_{0m\eta k} + \nu_{02k} n \xi_{0k} u_{0n\theta k} - 2i\nu_{0k} \xi_{0k} u_{0nrk} &= G_{0k} (q_{m\eta k} - q_{n\eta R_k}), \\
\nu_{02k} n \xi_{0k} u_{0m\eta k} + \varepsilon_{2k}^2 u_{0n\theta k} - 2inu_{0nrk} &= G_{0k} (q_{n\theta k} - q_{n\theta R_k}), \\
2i\nu_{0k} \xi_{0k} u_{0m\eta k} + 2inu_{0n\theta k} + \varepsilon_{3k}^2 u_{0nrk} &= G_{0k} (q_{nrk} - q_{nrR_k}),
\end{aligned} \tag{21}$$

где

$$\begin{aligned}
k &= 1, 2; \quad \varepsilon_{1k}^2 = \alpha_{0k}^2 - \varepsilon_{0k}^2, \quad \varepsilon_{2k}^2 = \beta_{0k}^2 - \varepsilon_{0k}^2, \quad \varepsilon_{3k}^2 = \gamma_{0k}^2 - \varepsilon_{0k}^2, \quad \xi_{0k} = \xi R_k, \\
\alpha_{0k}^2 &= 2\xi_{0k}^2 + \nu_{01k} n^2, \quad \beta_{0k}^2 = \nu_{01k} \xi_{0k}^2 + 2n^2, \quad \gamma_{0k}^2 = \chi_k^2 (\xi_{0k}^2 + n^2)^2 + 2, \quad \varepsilon_{0k}^2 = \nu_{01k} \xi_{0k}^2 M_{s0k}^2, \\
\nu_{01k} &= 1 - \nu_{0k}, \quad \nu_{02k} = 1 + \nu_{0k}, \quad M_{s0k} = \frac{c}{c_{s0k}}, \quad c_{s0k} = \sqrt{\frac{\mu_{0k}}{\rho_{0k}}}, \quad \chi_k^2 = \frac{h_{0k}^2}{6R_k^2}, \quad G_{0k} = -\frac{\nu_{01k} R_k^2}{\mu_{0k} h_{0k}};
\end{aligned}$$

$$q_{nj1} = (\sigma_{rj2}^*)_n \Big|_{r=R_1}, \quad q_{njR_1} = (\sigma_{rj1}^*)_n \Big|_{r=R_1}, \quad q_{nj2} = P_{nj}(\theta, \eta), \quad q_{njR_2} = (\sigma_{rj2}^*)_n \Big|_{r=R_2}, \quad j = \eta, \theta, r.$$

Из уравнений (21) находим

$$\begin{aligned} u_{0n\eta k} &= \frac{G_{0k}}{\delta_{nk}} \sum_{j=1}^3 \delta_{\eta jk} (q_{nj2} - q_{njR_k}), \\ u_{0n\theta k} &= \frac{G_{0k}}{\delta_{nk}} \sum_{j=1}^3 \delta_{\theta jk} (q_{nj2} - q_{njR_k}), \\ u_{0nrk} &= \frac{G_{0k}}{\delta_{nk}} \sum_{j=1}^3 \delta_{rjk} (q_{nj2} - q_{njR_k}). \end{aligned} \quad (22)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \delta_{nk} &= \delta_{\eta k} = (\varepsilon_{1k} \varepsilon_{2k} \varepsilon_{3k})^2 - (\varepsilon_{1k} \xi_1)^2 - (\varepsilon_{2k} \xi_{2k})^2 - (\varepsilon_{3k} \xi_{3k})^2 + 2\xi_1 \xi_{2k} \xi_{3k}, \\ \delta_{\eta 1k} &= (\varepsilon_{2k} \varepsilon_{3k})^2 - \xi_1^2, \quad \delta_{\eta 2k} = \xi_1 \xi_{2k} - \xi_{3k} \varepsilon_{3k}^2, \quad \delta_{\eta 3k} = i(\varepsilon_{2k}^2 \xi_{2k} - \xi_1 \xi_{3k}), \\ \delta_{\theta 1k} &= \delta_{\eta 2k}, \quad \delta_{\theta 2k} = (\varepsilon_{1k} \varepsilon_{3k})^2 - \xi_{2k}^2, \quad \delta_{\theta 3k} = i(\varepsilon_{1k}^2 \xi_1 - \xi_{2k} \xi_{3k}), \\ \delta_{r1k} &= -\delta_{\eta 3k}, \quad \delta_{r2k} = -\delta_{\theta 3k}, \quad \delta_{r3k} = (\varepsilon_{1k} \varepsilon_{2k})^2 - \xi_{3k}^2, \\ \xi_1 &= 2n, \quad \xi_{2k} = 2\nu_{0k} \xi_{0k}, \quad \xi_{3k} = \nu_{02k} \xi_{0k} n, \end{aligned}$$

для q_{nj2} и q_{njR_k} индекс $j = 1$ соответствует индексу η , $j = 2$ – индексу θ , $j = 3$ – индексу r .

Для определения коэффициентов a_{n1}, \dots, a_{n9} в зависимости от условия сопряжения оболочки со средой воспользуемся переписанными для u_{lk}^* ($l = r, \theta, \eta$) и $\sigma_{r\eta 1}^*$, $\sigma_{r\theta 1}^*$ граничными условиями (4) или (5) с учетом (8), (10), (19), (20), (22). Приравнявая коэффициенты рядов при $\exp(in\theta)$, получим бесконечную систему ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) линейных алгебраических уравнений, для решения которой можно использовать метод редукции или более удобный для решения поставленной задачи метод последовательных отражений [2], позволяющий при каждом последовательном отражении решать систему линейных уравнений блочно-диагонального вида с матрицами размером 9×9 , определителями $\Delta_n(\xi, c)$ вдоль главной диагонали. После определения коэффициентов компоненты НДС массива и заполнителя при действии на оболочку синусоидальной подвижной нагрузки (8) можно вычислить по формулам (19), (20).

Зная решение задачи для синусоидальной нагрузки, реакцию оболочки и окружающей ее среды на движущуюся с постоянной скоростью аперриодическую (локальную) нагрузку вида $P(\theta, \xi) = p(\theta)p(\eta)$ (характерного для транспортных средств) можно найти при помощи суперпозиции, используя представление нагрузки и компонент НДС массива и заполнителя в виде интегралов Фурье:

$$\begin{aligned} P(\theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P^*(\theta, \xi) \exp(i\xi\eta) d\xi = p(\theta)p(\eta) = p(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) \exp(i\xi\eta) d\xi, \\ P_m(\theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} P_m^*(\theta, \xi) \exp(i\xi\eta) d\xi = p_m(\theta)p(\eta) = p_m(\theta) \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} p^*(\xi) \exp(i\xi\eta) d\xi, \end{aligned} \quad (23)$$

$$m = r, \theta, \eta;$$

$$\begin{aligned}
u_{lk}(r, \theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} u_{lk}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi, \\
\sigma_{lmk}(r, \theta, \eta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \sigma_{lmk}^*(r, \theta, \xi) p^*(\xi) d\xi, \\
l = r, \theta, \eta, \quad m = r, \theta, \eta, \quad k = 1, 2.
\end{aligned} \tag{24}$$

Здесь

$$p^*(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} p(\eta) \exp(-i\xi\eta) d\eta.$$

Для вычислений перемещений и напряжений (24) можно использовать любой численный метод интегрирования, если определители $\Delta_n(\xi, c)$ ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) отличны от нуля, то есть когда скорость движения нагрузки c меньше ее критических скоростей $c_{(n)*}$, которые могут оказаться меньше, чем скорость волны Рэлея в массиве. Значения $c_{(n)*}$ зависят от числа n и определяются из дисперсионных уравнений $\Delta_n(\xi, c) = 0$ как минимумы соответствующих этим уравнениям дисперсионных кривых $c \sim \xi$. Минимальная критическая скорость, как показывают расчеты, имеет место при $n = 0$ ($\min c_{(n)*} = c_{(0)*}$) [2, 3].

Если исключить внутренний слой обшивки, получим двухслойную оболочку (рис. 2).

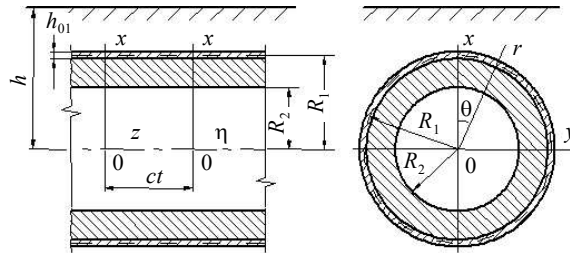


Рис. 2. Двухслойная оболочка в упругом полупространстве

В этом случае уравнения (2) рассматриваются только при $k = 1$, а компоненты НДС массива и толстого слоя оболочки при действии на нее движущейся с дорэле-евской скоростью синусоидальной нагрузки (8) по-прежнему определяются по формулам (19), (20).

Входящие в (19), (20) коэффициенты a_{nj} ($J = 1, 2, \dots, 9$) определяются из граничных условий (4) или (5), измененных только для внутренней поверхности оболочки (при $r = R_2$):

– для скользящего контакта оболочки с массивом

$$\begin{aligned}
\text{при } r = R_1 \quad u_{r1}^* &= u_{r2}^*, \quad u_{j2}^* = u_{0j1}, \quad \sigma_{r\eta 1}^* = 0, \quad \sigma_{r\theta 1}^* = 0, \\
\text{при } r = R_2 \quad \sigma_{rj2}^* &= P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta;
\end{aligned} \tag{25}$$

– для жесткого контакта оболочки с массивом

$$\begin{aligned}
\text{при } r = R_1 \quad u_{j1}^* &= u_{j2}^*, \quad u_{j1}^* = u_{0j1}, \\
\text{при } r = R_2 \quad \sigma_{rj2}^* &= P_j(\theta, \eta), \quad j = r, \theta, \eta.
\end{aligned} \tag{26}$$

Подставляя в зависимости от условия сопряжения оболочки с массивом в (25) или (26) соответствующие из (8), (10), (19), (20), (22) выражения и приравнявая коэффициенты рядов при $\exp(in\theta)$, так же, как и в случае воздействия подвижной си-

нусоидальной нагрузки на трехслойную оболочку, получим аналогичную бесконечную систему ($n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) линейных алгебраических уравнений, из которой находятся коэффициенты a_{nJ} ($J = 1, 2, \dots, 9$).

При действии на двухслойную оболочку (см. рис. 2) движущейся с дорэлеевой и докритической скоростью аperiodической нагрузки (23) компоненты НДС ее толстого слоя и массива определяются по формулам (24).

2. Численные эксперименты

Рассмотрим подкрепленный трехслойной обделкой тоннель глубиной заложения $h = 6$ м (см. рис. 1) в породном массиве со следующими характеристиками: $\nu_1 = 0,294$, $\mu_1 = \mu = 1,09 \cdot 10^8$ Па, $\rho_1 = 1,5 \cdot 10^3$ кг/м³. Расчетные параметры для обделки: обшивка – стальные ($\nu_{01} = \nu_{02} = 0,3$, $\mu_{01} = \mu_{02} = 8,08 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_{01} = \rho_{02} = 7,8 \cdot 10^3$ кг/м³) тонкостенные оболочки одинаковой толщины $h_{01} = h_{02} = 0,02$ м с радиусами средних поверхностей $R_1 = 3,0$ м и $R_2 = 2,5$ м; заполнитель – толстостенная бетонная ($\nu_2 = 0,2$, $\mu_2 = 1,21 \cdot 10^{10}$ Па, $\rho_2 = 2,5 \cdot 10^3$ кг/м³) оболочка. Контакт между породным массивом и обделкой полагаем скользящим, а между ее слоями – жестким.

На тоннель действует движущаяся со скоростью $c = 100$ м/с осесимметричная нормальная нагрузка давления интенсивностью q [Па], равномерно распределенная в интервале $|\eta| \leq l_0 = 0,2$ м. Интенсивность нагрузки подбирается таким образом, чтобы общая нагрузка по всей длине участка нагружения $2l_0$ равнялась эквивалентной сосредоточенной нормальной кольцевой нагрузке интенсивностью P° [Н/м], то есть $q = P^\circ / (2l_0)$.

Сравним НДС породного массива в окрестности указанного тоннеля с НДС породного массива в окрестности этого же тоннеля, подкрепленного двухслойной сталобетонной обделкой, конструктивно отличающейся от рассматриваемой трехслойной обделки отсутствием внутреннего слоя ($r = R_2$) обшивки (см. рис. 2).

Численные исследования соответствующих этим случаям дисперсионных уравнений показали, что в дозвуковом интервале скоростей корней они не имеют.

Введем обозначения: $u_r^\circ = u_r \mu / P^\circ$ [м], $u_x^\circ = u_x \mu / P^\circ$ [м], $u_y^\circ = u_y \mu / P^\circ$ [м], $\sigma_{rr}^\circ = \sigma_{rr} / P^\circ$, $\sigma_{\eta\eta}^\circ = \sigma_{\eta\eta} / P^\circ$, $\sigma_{yy}^\circ = \sigma_{yy} / P^\circ$, где $P^\circ = P^\circ / l$ [Па], $l = 1$ м.

На рис. 3 показаны эпюры радиальных перемещений u_r° и нормальных напряжений σ_{rr}° , $\sigma_{\eta\eta}^\circ$ на контуре $r = R_1$ контактирующей с обделкой поверхности массива при $\eta = 0$.

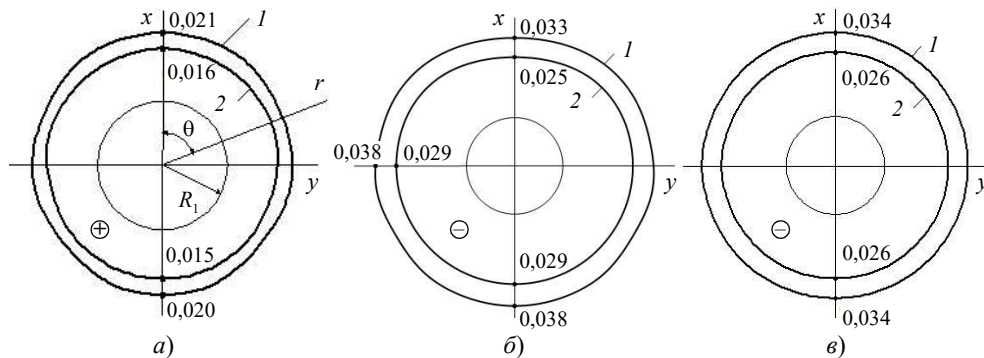


Рис. 3. Эпюры перемещений u_r° (а) и напряжений σ_{rr}° (б), $\sigma_{\eta\eta}^\circ$ (в)

Кривые 1 построены для тоннеля с двухслойной обделкой, кривые 2 – для тоннеля с трехслойной обделкой.

Как видно из эпюр, при замене трехслойной обделки на двухслойную значения компонент НДС массива увеличиваются в 1,3 раза.

Аналогичный эффект происходит на земной поверхности. На рис. 4 в координатной плоскости $xу$ изображены кривые изменений по земной поверхности u_x^o , u_y^o , σ_{yy}^o и $\sigma_{\eta\eta}^o$. Нумерация кривых имеет тот же смысл, что и на рис. 3.

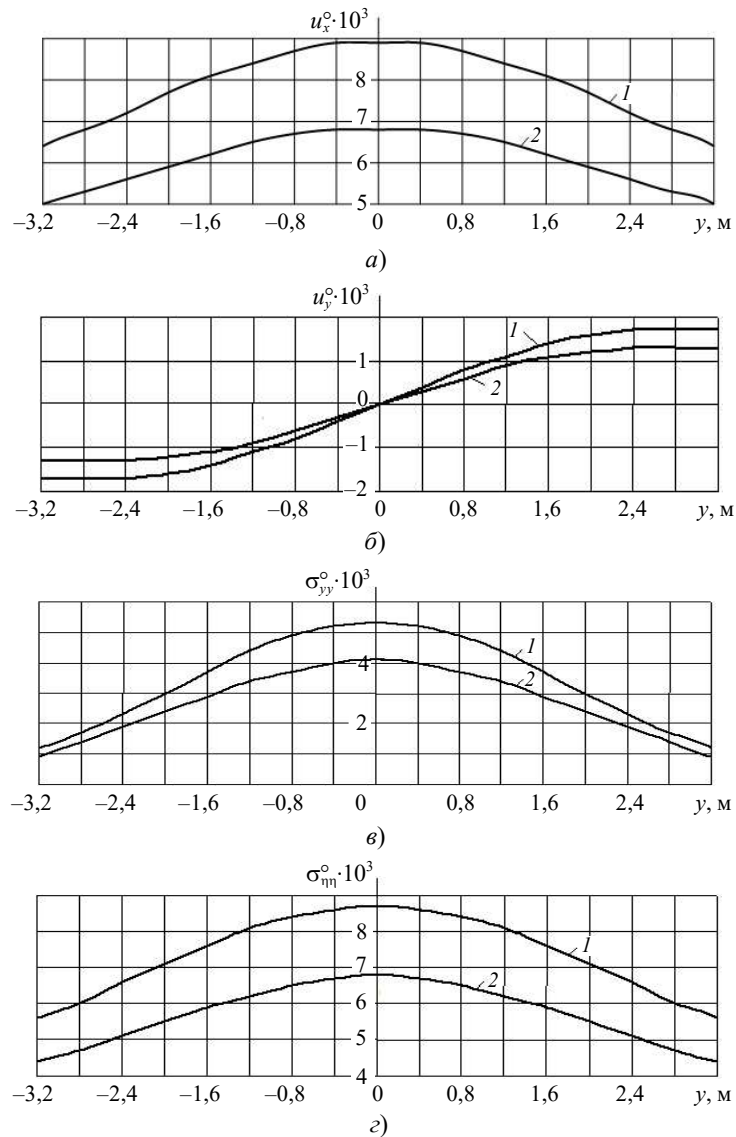


Рис. 4. Изменения компонент НДС земной поверхности в плоскости $xу$ при различных обделках тоннеля

Из анализа результатов численных экспериментов следует, что применение трехслойной обделки в качестве ограждающей конструкции более эффективно, чем двухслойной обделки, так как в этом случае динамическое воздействие движущейся нагрузки на породный массив снижается.

Заключение

Разработанные математические модели динамики тоннелей мелкого заложения можно рекомендовать проектным организациям в метростроении и тоннелестроении. Эти модели позволяют учесть не только физико-механические свойства материалов обделки тоннеля и породного массива, его конструктивные особенности, но также учесть глубину заложения тоннеля, вид транспортной нагрузки и скорость ее движения. Последнее особенно актуально в связи с повсеместным внедрением высокоскоростного транспорта.

Список литературы

1. Ержанов Ж.С., Айталиев Ш.М., Алексева Л.А. *Динамика тоннелей и подземных трубопроводов*. Алма-Ата: Наука, 1989. 240 с.
2. Украинец В.Н. *Динамика тоннелей и трубопроводов мелкого заложения под воздействием подвижных нагрузок*. Павлодар: НИЦ ПГУ, 2006. 123 с.
3. Alekseyeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads. *International Applied Mechanics*. 2009. Vol. 45. №9. P. 981–990. DOI: 10.1007/S10778-010-0238-Z.
4. Coskun İ., Enginb H., Özmutluc A. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity. *Journal of Shock and Vibration*. 2011. Vol. 18. No 6. P. 827–838. DOI: 10.3233/SAV-2010-0602.
5. Coskun İ., Dolmaseven D. Dynamic response of a circular tunnel in an elastic half space. *Journal of Engineering*. 2017. Vol. 2017. P. 6145375-1–6145375-12. <https://doi.org/10.1155/2017/6145375>.
6. Yuan Z., Boström A., Cai Y. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space. *Journal of Sound and Vibration*. 2017. Vol. 387. P. 177–193. DOI: 10.1016/J.JSV.2016.10.016.
7. Zhou Sh. *Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems*. London: Academic Press, 2019. 276 p.
8. Cao Z., Sun S., Yuan Z., Cai Y. Analytical study on the effect of moving surface load on underground tunnel. *Proceedings of China-Europe Conference on Geotechnical Engineering*. 13–16 Aug. 2016. Vienna, Austria. 2016. P. 1651–1655. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97115-5_163.
9. Sheng X. A review on modelling ground vibrations generated by underground trains. *International Journal of Rail Transportation*. 2019. Vol. 7. Iss. 4. P. 241–261. DOI: 10.1080/23248378.2019.1591312.
10. Dwivedia J.P., Singha V.P., Radha Krishna Lal, Sakshi Devia. Dynamic response of lined circular tunnel in linear viscoelastic medium due to moving ring load. *Materials Today: Proceedings*. 2017. Vol. 4. Iss. 2. Part A. P. 3767–3775. DOI: 10.1016/J.MATPR.2017.02.273.
11. El-Akily N., Datta S.K. Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half-space. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 1980. Vol. 8. No 5. P. 469–477. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290090506>.
12. El-Akily N., Datta S.K. Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half-space – numerical results. *Earthquake Engineering & Structural Dynamics*. 1981. Vol. 9. No 5. P. 477–487. DOI:10.1002/EQE.4290090506.
13. Алексева Л.А., Украинец В.Н., Гирнис С.Р. Задача о действии подвижной периодической нагрузки на многослойную оболочку в упругом полупространстве. *Известия НАН РК. Сер. физ.-мат.* 2015. №6. С. 47–56.
14. Украинец В.Н., Отарбаев Ж.О., Гирнис С.Р. Исследование напряженно-деформированного состояния подкрепленного двухслойной обделкой тоннеля мелкого заложения при действии транспортной нагрузки. *Вестник КазНТУ*. 2015. №5. С. 83–91.
15. Ukrainets V.N. Cojoint effect of mobile normal and torque loads on tunnel with circular support. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 2007. Vol. 310. No 1. P. 55–58.
16. Украинец В.Н. Действие подвижной нагрузки на толстостенную оболочку в упругом полупространстве. *Вестник Павлодарского государственного университета. Серия физико-математическая*. 2010. №4. С. 81–87.

17. Алексеева Л.А., Украинец В.Н. Модель динамики тоннеля и подземного трубопровода мелкого заложения под воздействием транспортных нагрузок. *Вестник Евразийского национального университета. Серия математика, компьютерные науки, механика*. 2020. №4. С. 28–39. DOI: 10.32523/2616-7182/2020-133-4-28-39.

18. Alekseyeva L.A., Ukrainets V.N. Transport problems of dynamics of multilayered shell in elastic half-space and their solutions. *Kazakh Mathematical Journal*. 2021. No 1. P. 38–53.

19. Алексеева Л.А., Украинец В.Н., Гирнис С.Р. Напряженно-деформированное состояние подкрепленного трехслойной оболочкой тоннеля мелкого заложения при действии транспортных нагрузок. *Прикладная математика и механика*. 2022. Т. 86. №2. С. 263–275. DOI: 10.31857/S0032823522020023.

20. Бульчев Н.С. *Механика подземных сооружений в примерах и задачах*. М.: Недра, 1989. 270 с.

References

1. Erzhanov Zh.S., Aytaliev Sh.M., Alekseyeva L.A. *Dinamika tonneley i podzemnykh truboprovodov [Dynamics of Tunnels and Underground Pipelines]*. Alma-Ata. Nauka Publ. 1989. 240 p. (In Russian).

2. Ukrainets V.N. *Dinamika tonneley i truboprovodov melkogo zalozheniya pod vozdeystviem podvizhnykh nagruzok [Dynamics of Shallow Tunnels and Underground Pipelines under Moving Loads]*. Pavlodar. NITs PGU Publ. 2006. 123 p. (In Russian).

3. Alekseyeva L.A., Ukrainets V.N. Dynamics of an elastic half-space with a reinforced cylindrical cavity under moving loads. *Int. Appl. Mech.* 2009. Vol. 45. №9. P. 981–990. DOI: 10.1007/S10778-010-0238-Z.

4. Coskun İ., Enginb H., Özmutluc A. Dynamic stress and displacement in an elastic half-space with a cylindrical cavity. *Shock Vib.* 2011. Vol. 18. No 6. P. 827–838. DOI: 10.3233/SAV-2010-0602.

5. Coskun İ., Dolmaseven D. Dynamic response of a circular tunnel in an elastic half space. *Journal of Engineering*. 2017. Vol. 2017. P. 6145375-1–6145375-12. <https://doi.org/10.1155/2017/6145375>.

6. Yuan Z., Boström A., Cai Y. Benchmark solution for vibrations from a moving point source in a tunnel embedded in a half-space. *J. Sound Vib.* 2017. Vol. 387. P. 177–193. DOI: 10.1016/J.JSV.2016.10.016.

7. Zhou Sh. *Dynamics of Rail Transit Tunnel Systems*. London. Academic Press. 2019. 276 p.

8. Cao Z., Sun S., Yuan Z., Cai Y. Analytical study on the effect of moving surface load on underground tunnel. *Proceedings of China-Europe Conference on Geotechnical Engineering*. 13–16 Aug. 2016. Vienna, Austria. 2016. P. 1651–1655. https://doi.org/10.1007/978-3-319-97115-5_163.

9. Sheng X. A review on modelling ground vibrations generated by underground trains. *Int. J. Rail Transp.* 2019. Vol. 7. Iss. 4. P. 241–261. DOI: 10.1080/23248378.2019.1591312.

10. Dwivedia J.P., Singha V.P., Radha Krishna Lal, Sakshi Devia. Dynamic response of lined circular tunnel in linear viscoelastic medium due to moving ring load. *Materials Today: Proceedings*. 2017. Vol. 4. Iss. 2. Part A. P. 3767–3775. DOI: 10.1016/J.MATPR.2017.02.273.

11. El-Akily N., Datta S.K. Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half-space. *Earthq. Eng. Struct. Dyn.* 1980. Vol. 8. No 5. P. 469–477. <https://doi.org/10.1002/eqe.4290090506>.

12. El-Akily N., Datta S.K. Response of a circular cylindrical shell to disturbances in a half-space – numerical results. *Earthq. Eng. Struct. Dyn.*. 1981. Vol. 9. No 5. P. 477–487. DOI:10.1002/EQE.4290090506.

13. Alekseyeva L.A., Ukrainets V.N., Girmis S.R. Zadacha o deystvii podvizhnoy periodicheskoy nagruzki na mnogoslouynuyu obolochku v uprugom poluprostranstve [Task about action of mobile periodic load on the multilayered cover in the elastic half-space]. *Izvestiya NAN RK. Seriya fiziko-matematicheskaya [News of NAS. Physical-Mathematical Science]*. 2015. No 6. P. 47–56 (In Russian).

14. Ukrainets V.N., Otbarbaev Zh.O., Girmis S.R. Issledovanie napryazhenno-deformirovannogo sostoyaniya podkrepennogo dvukhsloynoy obdelkoy tonnellya melkogo zalozheniya pri deystvii transportnoy nagruzki [Influence of tense-deformed condition of two-layer tunnel lining of a small

embedding at action of transport load]. *Vestnik KazNRTU*. 2015. No 5. P. 83–91 (In Russian).

15. Ukrainets V.N. Cojoint effect of mobile normal and torque loads on tunnel with circular support. *Bulletin of the Tomsk Polytechnic University*. 2007. Vol. 310. No 1. P. 55–58.

16. Ukrainets V.N. Deystvie podvizhnoy nagruzki na tolstostennuyu obolochku v uprugom poluprostranstve [Action of moving loading on a thick shell in elastic halfspace]. *Vestnik Pavlodarskogo gosudarstvennogo universiteta. Seriya fiziko-matematicheskaya [Bulletin of Pavlodar State University. Series of Physics and Mathematics]*. 2010. No 4. P. 81–87 (In Russian).

17. Alekseyeva L.A., Ukrainets V.N. Model dinamiki tonnelya i podzemnogo truboprovoda melkogo zalozheniya pod vozdeystviem transportnykh nagruzok [Model of the dynamics of a tunnel and a shallow underground pipeline under the action of traffic loads]. *Vestnik Evraziyskogo natsionalnogo universiteta. Seriya matematika, kompyuternye nauki, mekhanika [Bulletin of Eurasian National University. Mathematics. Computer Science. Mechanics Series]*. 2020. No 4. P. 28–39 (In Russian).

18. Alekseyeva L.A., Ukrainets V.N. Transport problems of dynamics of multilayered shell in elastic half-space and their solutions. *Kazakh Mathematical Journal*. 2021. No 1. P. 38–53.

19. Alekseyeva L.A., Ukrainets V.N., Giris S.R. Napryazhenno-deformirovannoe sostoyanie podkreplennogo trekhslonnoy obolochkoy tonnelya melkogo zalozheniya pri deystvii transportnykh nagruzok [Stress-strain state of the shallow tunnel supported by a three-layer shell under action of transport loads]. *Prikladnaya matematika i mekhanika [Journal of Applied Mathematics and Mechanics]*. 2022. Vol. 86. No 2. P. 263–275 (In Russian).

20. Bulychev N.S. *Mekhanika podzemnykh sooruzheniy v primerakh i zadachakh [Mechanics of Underground Structures in Examples and Problems]*. Moscow. Nedra Publ. 1989. 270 p. (In Russian).

STRESS-DEFORMED STATE OF THE SHALLOW TUNNELS REINFORCED BY LAYERED SHELLS UNDER THE ACTION OF TRANSPORT LOADS

Alexeyeva L.A.¹, Ukrainets V.N.², Giris S.R.²

¹*Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Republic of Kazakhstan*

²*Toraighyrov University, Pavlodar, Republic of Kazakhstan*

Based on the solution of the problem of the action of a transport loads moving at a constant speed on a three-layer or two-layer shells in an elastic half-space, a comparative analysis was performed for the rock mass in the vicinity of a shallows circular tunnel with various designs of their lining (three-layer and two-layer), along the inner surface of which an axisymmetric normal load moves at a constant speed. The inner layer of the three-layer lining is a thick-walled concrete shell, and the outer layers are thin-walled steel shells of equal thickness. The two-layer lining is structurally different from the considered three-layer lining by the absence of the inner layer of the lining.

Dynamic equations of elasticity theory in Lamé potentials are used to describe the motion of the half-space and the inner layer of the shell. The vibrations of the outer layers of the shell are described by the classical equations of the theory of thin shells. The equations are represented in a movable coordinate system. The contact between the shell and the array is assumed to be either rigid or sliding. The contact between the layers of the shell is supposed to be rigid.

To solve the problem, the method of incomplete separation of variables is used. The solution for potentials is presented in the form of a superposition of Fourier-Bessel series and contour integrals of the Fourier type. Next, the method of decomposition of potentials into plane waves and re-decomposition of plane waves into series according to cylindrical functions is used. The solution is obtained for the case when the velocity of the load is less than its critical velocities.

The calculation results are presented in the form of graphs and are analyzed in detail. From the analysis of the calculation results, it follows that the use of a three-layer lining as a building envelope is more efficient than a two-layer lining, since in this case the dynamic effect of the moving loads on the rock mass is significantly less.

Keywords: tunnel, elastic half-space, three-layer (two-layer) circular shell, moving load, displacement, deformation, stress.